



Identification en imagerie Doppler : liens avec la transformée de radon généralisée

Catherine Mennessier

► To cite this version:

Catherine Mennessier. Identification en imagerie Doppler : liens avec la transformée de radon généralisée. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1997. Français. NNT : . tel-00686829

HAL Id: tel-00686829

<https://theses.hal.science/tel-00686829>

Submitted on 11 Apr 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE
PRESENTEE PAR

Catherine MENNESSIER

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

SPECIALITE ASTROPHYSIQUE

IDENTIFICATION EN IMAGERIE DOPPLER :
LIENS AVEC LA TRANSFORMÉE DE RADON
GÉNÉRALISÉE

DATE DE SOUTENANCE: 17 octobre 1997

COMPOSITION DU JURY :

Guy Pelletier	Président
Claude Bertout	Directeur de thèse
Laurent Desbat	Directeur de thèse
Michel Barlaud	Rapporteur
André Lannes	Rapporteur
Michel Defrise	Examineur
Jean-Marie Becker	Examineur
Stéphane Guilloteau	Examineur

THESE PREPAREE AU SEIN DU LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE,
ET DU LABORATOIRE TIMC-IMAG,

THESE
PRESENTEE PAR

Catherine MENNESSIER

POUR OBTENIR LE TITRE DE DOCTEUR
DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER - GRENOBLE 1
(Arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

SPECIALITE ASTROPHYSIQUE

**IDENTIFICATION EN IMAGERIE DOPPLER :
LIENS AVEC LA TRANSFORMÉE DE RADON
GÉNÉRALISÉE**

DATE DE SOUTENANCE : 17 octobre 1997

COMPOSITION DU JURY :

Guy Pelletier	Président
Claude Bertout	Directeur de thèse
Laurent Desbat	Directeur de thèse
Michel Barlaud	Rapporteur
André Lannes	Rapporteur
Michel Defrise	Examineur
Jean-Marie Becker	Examineur
Stéphane Guilloteau	Examineur

THESE PREPAREE AU SEIN DU LABORATOIRE D'ASTROPHYSIQUE,
ET DU LABORATOIRE TIMC-IMAG,

La terre est bleue comme une orange.

Paul Éluard

Remerciements

La richesse de ces trois années à l'Observatoire, au coeur des trois massifs montagneux, tient à la palette des rencontres, si haute en couleurs. Ce qui fut n'aurait été sans tous ceux que j'ai croisés.

Je remercie Claude Bertout qui m'a offert de poursuivre les travaux d'Isabelle Joncour en imagerie Doppler. Je lui suis reconnaissante de la confiance qu'il m'a témoignée lorsque je choisisais des voies bien autres de celles qu'il aurait imaginé. Ma maladresse à écrire ne peut qu'exprimer très mal tout ce que je dois à Laurent Desbat. Je n'ai souvenir d'aucune heure de travail qui ait pu me sembler laborieuse. J'ai appris quantité de choses comme : - rien ne doit entraver l'élan à résoudre un problème, seul importe de croire au dénouement et ainsi de poursuivre toujours plus loin... et aussi - rien n'excuse de ne prendre son temps...

Un immense merci à Guy Pelletier pour son soutien permanent. Il n'y aurait sans doute pas eu de tomographie des étoiles sans sa bonne intuition à me faire rencontrer Laurent. J'ai aimé ton enthousiasme à résoudre tout jeu mathématique... Je dois énormément à Jean-Marie Becker. Sans son écoute, ses encouragements à suivre l'étude du problème sous une forme plus mathématique, la persévérance aurait été plus difficile. Merci de ton aide en mathématique mais aussi du régal que j'ai toujours trouvé à partager tes innombrables idées.

Merci à Michel Defrise pour son accueil à l'Université Libre de Bruxelles. Merci à Michel Barlaud, André Lannes, Stéphane Guilloteau d'avoir tenu le rôle de membres du jury.

Merci à François qui a été le principal interlocuteur à l'Observatoire et m'a aidée à saisir tout l'intérêt astrophysique de l'imagerie Doppler d'une jeune étoile. À Chrisitan P. directeur de l'Observatoire. Mes remerciements vont également à Pyl, Gilles H., Fabien, Manuel, Thierry... pour votre aide et le temps que vous avez pris pour répondre à mes questions souvent bien loin de vos préoccupations. À Pierre V. qui a aussi conduit à construire la passerelle entre l'astro et la tomo et a toujours porté un vif intérêt à ce travail. Un très grand merci à Fanfan que allons trouver non seulement pour s'envoler du jour au lendemain en Israël mais aussi pour se détendre. À Ginette qui défie sur le champs, gnomes et autres farfadets de l'informatique.

Je dois également beaucoup à Gérard M. qui m'a apporté son expérience à analyser dans le détail les arabesques mathématiques des équations de Volterra. Sa rigueur, son exigence ont façonné ce travail. J'ai eu un immense plaisir à rencontrer Yves Colin de Verdière dont la facilité à saisir le problème et la curiosité à le résoudre m'ont aidée autant que fascinée. Merci à la petite équipe de l'INRIA Rocquencourt pour leur aide en analyse numérique et leur cours que j'ai suivi avec tant d'enthousiasme ; en particulier à Claude Lemaréchal et J.C. Gilbert pour leur accueil.

À Stéph. pour sa présence discrète, sa constante bonne humeur et son art à manier boulot et repos. Merci à Zouzou pour tes oreilles attentives et l'éclat de ton rire. À Laure pour les heures partagées au bureau. C'est si peu dire que ta présence a été la felicidad de cada día. À David pour ses conversations qui vont des corrections de l'imagerie Doppler aux hommes de la préhistoire en passant par le joueur d'échecs. Merci à Stephen pour les instants partagés à observer au milieu du Negev. Merci encore à Claudia, Frédounette, Fréd P., Pop, JPB, Pat, Evy, Fisseau, Claire, Judith... À Nicolas M. pour sa poésie mais aussi son rôle de lecteur avisé. À Pierre M. pour tes réponses détaillées et claires à quelques unes de mes questions, pour ton accueil et tes encouragements. Merci à la petite troupe du gum avec qui j'ai escaladé les sommets blancs et échangé quelques accords de guitare. Un merci particulier à Sophie et Fab pour leur relevé de fautes mais aussi à Benoît, Junior, Dom et Olive... La tribu des Fou le tiers bien qu'un peu loin est bien restée présente. À Christian pour ses savoureux contes provençaux du matin... La rédaction était ainsi plus légère après un bon bol d'air bien parfumé de l'accent du sud. À Flo pour ses délicieuses cartes et son attention discrète mais si vraie. À mes parents pour leur éternel écoute et tout ce que je leur dois...

Résumé

Le champ magnétique des étoiles joue un rôle essentiel dans leur évolution interne et dans l'interaction qu'elles entretiennent avec leur environnement. Il se manifeste, entre autre, par l'existence de structures inhomogènes à leur surface. Hélas à de rares exceptions la résolution des télescopes reste insuffisante pour les résoudre spatialement. Ceci oblige donc à se tourner vers des méthodes indirectes. Telle est le but de l'imagerie Doppler.

Après un exposé détaillé du principe de l'imagerie Doppler et quelques rappels sur la tomographie - transformée de Radon classique - nous montrons que cette technique astrophysique peut être traduite en termes de transformée de Radon généralisée. Cette réécriture du problème inverse d'imagerie Doppler permet d'étudier l'identifiabilité. Nous en déduisons, en particulier, l'existence de fonctions radiales du noyau. Des codes numériques performants utilisés classiquement en tomographie sont ensuite adaptés à notre type de mesure. Ils permettront de mieux caractériser les fonctions du noyau déduites de l'étude précédente. Nous nous intéressons ensuite à la géométrie d'échantillonnage des mesures en imagerie Doppler. Pour cela, nous étendons les résultats de schémas d'échantillonnage de la transformée de Radon classique à la transformée de Radon généralisée invariante par rotation avec fonction poids polynomiales. Ce résultat peut être appliqué à deux cas singuliers en imagerie Doppler.

Par ailleurs, nous présentons les enjeux astrophysiques de l'imagerie Doppler : dans un premier temps sont résumées diverses manifestations du champ magnétique dans l'activité des étoiles, en particulier des étoiles jeunes T Tauri ainsi que le rôle de ce champ dans certains modèles d'évolution. Dans un deuxième temps sont données diverses techniques permettant d'estimer l'activité magnétique, parmi lesquelles l'imagerie Doppler dont la spécificité est soulignée. Enfin, cette technique est appliquée sur des données réelles issues d'observations que nous avons menées à l'Observatoire de Haute Provence. Des structures en surface sont déduites et les résultats sont discutés.

Abstract

The magnetic field plays a major role in the star evolution as well as its interaction with the circumstellar environment. A consequence of the magnetic activity is the existence of stellar surface structures. Unfortunately, very few stars can be spatially resolved by telescope so that indirect methods are needed. Doppler imaging is one of them.

We first begin with a detailed presentation of Doppler imaging. We explain, more briefly, what is tomography or equivalently, classical Radon transform. This enable us to show the analogy between these two methods. Doppler imaging is then express as a generalized Radon transform. It is thus easier to study the identification of this inverse problem. In particular we deduce the existence of some radial functions in the Doppler imaging operator kernel. Efficient numerical code are adapted to our geometry in order to characterize these functions of the kernel precedently deduced. Then we focus on the sampling geometry in Doppler imaging. Again we extend some well known results of efficient sampling in classical tomography to the rotation invariant generalized Radon transform with polynomial weight functions. This result can be applied on two extremely cases in Doppler imaging.

Besides, we deal with Doppler imaging astrophysical implications. First, we show some evidence of the stars magnetic activity, in particular for the T Tauri stars. Then we briefly present how magnetic field is part of evolution models. Secondly, we make a short revue of the main methods that help to estimate the magnetic activity and we insist on the specificity of Doppler imaging among these methods. At least, this technique is applied to some real data that we obtained on SU Aurigae from the Observatoire de Haute Provence. Some evidence of surface structures on this T Tauri star is deduced and discussed.

Table des matières

Résumé	3
Notations	12
Introduction	15
I Problème inverse en imagerie Doppler	17
1 Imagerie Doppler	19
1.1 Historique	19
1.2 Description générale de la technique d'imagerie Doppler	21
1.2.1 Géométrie et notations	22
1.2.2 La mesure en imagerie Doppler : modèle physique standard	25
1.2.3 De l'évolution temporelle des spectres à la distribution spatiale du flux	28
1.3 Définitions et rappels de tomographie	30
1.3.1 Quelques applications	31
1.3.2 Définitions et propriétés	33
1.3.3 Inversion	36
2 Inversibilité dans un contexte de tomographie généralisée : approche analytique	39
2.1 De l'imagerie Doppler vers la tomographie	40
2.1.1 Modèle à deux températures	40
2.1.2 Expression de la mesure dans le cadre de ce modèle	41
2.1.3 Opérateur par blocs de quatre transformées de Radon généralisées obtenues par transformations unitaires	45
2.2 Unicité et stabilité des solutions	47

2.2.1	Équations de Volterra associées aux transformées de Radon généralisées invariantes par rotation	48
2.2.2	Inversibilité dans le cas des fonctions poids réduites aux indicatrices de l'hémisphère visible	56
2.2.3	Inversibilité : cas général avec approximations	62
2.2.4	Inversibilité : cas général sans approximations	67
3	Méthodologies pour l'inversion	69
3.1	Théorie de la régularisation	70
3.1.1	Problème mal posé et équations intégrales de première espèce . . .	70
3.1.2	Régularisation de Tikhonov	74
3.1.3	Régularisation par maximum d'entropie	77
3.1.4	Choix du paramètre de régularisation	79
3.2	Modèles numériques	81
3.2.1	Description de l'algorithme pour l'inversion numérique de l'équation d'Abel	81
3.2.2	Méthode Algébrique de Reconstruction de la transformée de Radon	85
3.3	Quelques résultats issus des reconstructions	89
3.3.1	Caractérisation des fonctions radiales	89
3.3.2	Quelques résultats sur l'analyse de la stabilité	102
4	Échantillonnage efficace en imagerie Doppler	115
4.1	Rappels sur l'échantillonnage des signaux	116
4.2	Qu'est-ce que l'échantillonnage efficace	117
4.3	Échantillonnage efficace en tomographie classique	118
4.4	Échantillonnage efficace de la transformée de Radon invariante par rotation : application à l'imagerie Doppler	121
	Conclusion	129
II	Enjeu de l'imagerie Doppler et application à l'étoile T Tauri : SU Aurigae	131
1	Champ magnétique à la surface des étoiles	133
1.1	Le soleil comme paradigme de l'activité magnétique stellaire	134
1.1.1	Description phénoménologique	134
1.1.2	Quelques éléments d'explication de l'activité	136

1.2	Signature du champ magnétique dans les T Tauri	138
1.2.1	Définition et propriétés des T Tauri	138
1.2.2	Indices de l'activité magnétique des T Tauri	141
1.2.3	Quelques modèles existants	144
2	Contribution à l'étude de l'activité de SU Aurigae	149
2.1	Propriétés de SU Aurigae	150
2.1.1	Paramètres stellaires	150
2.1.2	Chromosphère	151
2.1.3	Rotation différentielle	152
2.1.4	Vent et accréition	152
2.2	Observations	154
2.2.1	Spectrométrie	154
2.2.2	Photométrie	156
2.2.3	Polarimétrie	157
2.3	Cartes d'imagerie Doppler de SU Aurigae	157
2.3.1	Code de maximum d'entropie	157
2.3.2	Préparation des données d'imagerie Doppler	158
2.3.3	Cartes Doppler de SU Aurigae : résultats et discussion	158
	Conclusions	169
III	Annexes	171
1	Mesures des transformées de Radon généralisées	173
1.1	Opérateur G^\pm	173
1.2	Opérateur $G^{p/i}$	176
2	Singularités des équations de Volterra	179
2.1	Singularités, à l'origine et aux racines des polynômes de Tchebitchev, de l'opérateur M^p	179
2.2	Singularité, à l'origine, de l'opérateur A^i	181

Table des figures

Partie I	17
1.1 Description générale de la mesure en imagerie Doppler	21
1.2 Référentiels de travail en imagerie Doppler	23
1.3 Indicatrices de l'hémisphère visible de l'étoile	25
1.4 Mesure en imagerie Doppler du flux	29
1.5 Courbes d'iso-vitesse dans une représentation plate carrée	30
1.6 Tomographie par transmission : géométries parallèle et en éventail.	31
2.1 Courbes d'iso-vitesse ($\Delta\lambda = \text{cste}$) dans le plan du ciel	43
2.2 Changement de l'ordre d'intégration des équations de Volterra	59
2.3 Approximations des fonctions poids permettant d'obtenir un système tri- angulaire par blocs.	64
3.1 Caractérisation d'indicatrice en latitude du noyau.	95
3.2 Caractérisation des fonctions radiales constantes du noyau.	97
3.3 Influence du coefficient d'assombrissement centre-bord sur des fonctions ra- diales du noyau régulières sur la sphère.	99
3.4 Indicatrices de bandes en latitude du noyau. Influence du coefficient d'as- sombrissement centre-bord.	101
3.5 Représentations sur la sphère d'une fonction du noyau d'indicatrices pour les valeurs extrêmes du limbe.	102
3.6 Stabilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation de l'angle d'inclinaï- son. Reconstruction d'une tache de l'hémisphère nord	104
3.7 Stabilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation de l'angle d'inclinaï- son. Reconstruction d'une tache de l'hémisphère sud	105
3.8 Stabilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation de la période. Re- construction de taches aux hautes latitudes.	106
3.9 Stabilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation de la période. Re- construction de taches équatoriales.	108

3.10 De l'insuffisance du nombre de données à rapport constant du nombre de rotations sur le nombre de translations constant	110
3.11 Influence du rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations.	110
3.12 Conséquences d'une diminution de la couverture en phase.	111
3.13 Sensibilité au rapport signal sur bruit.	112
3.14 Sensibilité au taux de régularisation pour différente valeur du rapport signal sur bruit.	114
4.1 Échantillonnage suivant une grille standard et hexagonale d'une fonction à support dans un disque	119
4.2 Échantillonnage suivant une grille carrée et entrelacée de la transformée de Radon d'une fonction essentiellement b -bande limitée.	120

Partie II

131

1.1 Manifestation de l'activité magnétique du soleil : les taches solaires	135
1.2 Observation d'une T Tauri en optique adaptative: Z CMa	139
1.3 Modèle d'accrétion	147
2.1 Courbe de lumière de SU Aurigae en B,V et R	156
2.2 Cartes Doppler de SU Aurigae obtenues avec les raies du Ca, Li, Fe, Mg : régions froides.	160
2.3 Distribution en latitude des régions froides sur SU Aurigae	161
2.4 Représentation sur la sphère des régions froides sur SU Aurigae pour chacune des quatre raies	162
2.5 Solutions Carte Doppler obtenue à partir de quatre raies en même temps ou de la photométrie.	164
2.6 Comparaison des cartes Doppler issues des observations des hivers 1994 et 1995	165
2.7 Variation des largeurs équivalentes de raies photosphériques et de la raie de l'hélium	166
2.8 Carte Doppler de régions chaudes sur SU Aurigae	167

Annexes

171

1.1 Paramètres de l'ellipse \mathcal{E}	174
---	-----

Notations

- $x \cdot y$: produit scalaire standard entre deux vecteurs x et y de \mathbb{R}^n .
- $\|x\|$: norme euclidienne de x .
- A^* : adjoint de l'opérateur A par rapport au produit scalaire standard.
- c : demi-petit-axe de l'ellipse \mathcal{E} , $c = \cos \alpha$.
- c_e : célérité de la lumière.
- D : disque unitaire de \mathbb{R}^2 .
- \mathcal{E} : ellipse de demi-petit-axe c et de demi-grand-axe unitaire.
- \mathcal{E}^c : complémentaire de \mathcal{E} dans D .
- $f = (f^+, f^-)^t$: fonction (facteur de remplissage) à support sur deux disques dans la décomposition nord-sud.
- $f_s = (f_s^+, f_s^-)^t$: fonction à valeur sur la sphère dans la décomposition nord-sud.
- h : constante de Planck.
- $H_0(\lambda, T(\zeta))$: profil intrinsèque d'une raie (comme mesuré en laboratoire).
- $I_{\lambda_0}(T(\zeta))$: énergie rayonnée (évaluée par la fonction de Planck.)
- k : constante de Boltzman.
- $\mathcal{O}(n)$: groupe de rotation dans \mathbb{R}^n .
- P_e : plan équatorial (o, e_1, e_2) .
- P_o : plan du ciel (o, o_1, o_2) .
- R : rayon de l'étoile.
- Rf : opérateur de transformée de Radon classique.
- $R_\mu f$: opérateur de transformée de Radon généralisée.

-
- $R^\sharp f$: opérateur dual de Rf .
 - S^{n-1} : sphère unitaire dans \mathbb{R}^n .
 - $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$: espace des fonctions de Schwartz.
 - $T(\zeta)$: température à reconstruire en imagerie Doppler.
 - $v_{rad}(\phi, \zeta)$: composante sur l'axe de visée de la vitesse en un point ζ à la phase ϕ .
 - $V(\phi)$: ensemble des points visibles à la phase ϕ .
 - $W(\cos \theta_0(\phi, \zeta))$: loi d'assombrissement centre-bord.
 - α : angle d'inclinaison entre l'axe de visée et l'axe de rotation.
 - ζ : vecteur de la sphère unitaire S^2 .
 - θ_0 : angle entre la normale en un point et l'axe de visée.
 - θ_r : latitude dans le repère liée à l'étoile.
 - ϵ : coefficient d'assombrissement centre-bord.
 - ϕ : angle dont a tourné l'étoile : phase.
 - χ^+ : indicatrice de la partie visible de l'hémisphère supérieur projeté sur P_e .
 - χ^- : indicatrice de la partie visible de l'hémisphère inférieur projeté sur P_e .
 - ψ_r^- : longitude dans le repère liée à l'étoile.
 - λ_0 : longueur d'onde centrale de la raie.
 - ω : vecteur de S^{n-1} .
 - Ω : vitesse angulaire de rotation de l'étoile.

Introduction

La compréhension des phénomènes physiques passe, en règle générale, par l'observation des faits naturels qui en sont issus. C'est ainsi que l'évolution de la structure interne des étoiles et l'interaction que ces dernières entretiennent avec le milieu circumstellaire, se révèlent tant par l'imagination de nouveaux modèles que par la description plus détaillée des systèmes. Ainsi, l'**imagerie Doppler** vise à dresser la distribution en brillance, à la surface d'une étoile. Cette technique astrophysique repose sur l'information contenue dans la forme des raies d'un spectre, élargies par effet Doppler du fait de la rotation de l'étoile sur elle-même. La carte qui est déduite renseigne, en particulier, sur la topologie du champ magnétique à la surface et peut également apporter quelques éléments d'explication sur la manière dont la matière s'accrète sur l'étoile.

L'imagerie Doppler est une technique relativement récente puisque les premières applications remontent réellement aux années 70. D'aucuns devinaient l'instabilité du problème sans en connaître pour autant la vraie nature. Or, de tout outil il est essentiel d'en appréhender les limites, d'une part pour l'interprétation des résultats, d'autre part afin de proposer des algorithmes de reconstruction stable.

C'est pourquoi, dans le but d'étudier avec plus de précision les opérateurs mis en jeu en imagerie Doppler, il convenait de trouver un cadre un peu formel. Nous avons établi un parallèle avec la tomographie. Dès lors, nous avons pleinement bénéficié de l'étude de la transformée de Radon invariante par rotation et également de l'analyse des conditions optimales d'échantillonnage. Ainsi nous avons mis en évidence une ambiguïté cruciale : il existe un ensemble de fonctions radiales dont l'image par "mesure Doppler" est nulle. À partir des travaux sur l'échantillonnage, nous avons montré que, pour les deux cas extrêmes d'inclinaison de l'étoile, les conditions d'application de l'échantillonnage entrelacé, efficace, étaient vérifiées.

Par ailleurs, nous avons mené des observations, à l'Observatoire de Haute Provence (OHP), à partir desquelles la carte Doppler de la T Tauri SU Aurigae a pu être obtenue. Des régions équatoriales et des régions aux latitudes voisines de 45° , d'une température plus basse que la photosphère, ont été mises en évidence de même qu'une durée de vie des structures d'une année au moins.

Notre manuscrit comprend ainsi deux parties : la première propose une analyse du problème inverse d'imagerie Doppler et la seconde offre une contribution à l'étude des phénomènes complexes dont SU Aurigae est le siège.

Le premier chapitre expose le principe sur lequel repose l'imagerie Doppler. Dans le second, ce problème est exprimé en termes de tomographie généralisée ce qui permet l'étude de l'injectivité. Sous certaines approximations, le noyau de l'opérateur est déduit. Deux méthodes numériques, présentées dans le chapitre 3, complètent l'étude du caractère mal posé de l'imagerie Doppler. Enfin, dans un dernier chapitre, nous étudions la géométrie d'échantillonnage efficace de la transformée de Radon invariante par rotation et son application à l'imagerie Doppler.

La seconde partie est constituée d'un chapitre d'introduction sur le rôle joué par le champ magnétique dans l'évolution des étoiles avec une attention particulière aux étoiles T Tauri. L'étude de SU Aurigae, basée sur des observations menées à un an d'intervalle, vient illustrer l'information qui peut être déduite des cartes Doppler.

'Would you tell me, please, which way I ought to go to from there?'
'That depends on good deal on where you want to get to', said the Cat.
'I don't much care where ..' said Alice.
'Then it doesn't matter which way you go', said the Cat.
'.. so long as I get somewhere', Alice added as an explanation.
'Oh, you're sure to do that', said the cat, 'if you only walk long enough.'

Alice's Adventures in Wonderland, Lewis Carroll

Première partie

Problème inverse en imagerie Doppler

Chapitre 1

Imagerie Doppler

Sommaire

1.1	Historique	19
1.2	Description générale de la technique d'imagerie Doppler	21
1.2.1	Géométrie et notations	22
1.2.2	La mesure en imagerie Doppler : modèle physique standard	25
1.2.3	De l'évolution temporelle des spectres à la distribution spatiale du flux	28
1.3	Définitions et rappels de tomographie	30
1.3.1	Quelques applications	31
1.3.2	Définitions et propriétés	33
1.3.3	Inversion	36

Dans ce chapitre, l'imagerie Doppler est présentée sous sa forme la plus générale. Après un bref rappel historique, le principe est exposé et les principales notations sont introduites. Cette présentation vise à donner qualitativement une idée du lien qui existe entre l'imagerie Doppler et la tomographie. En effet, l'originalité du travail qui suivra repose tout entière sur cette analogie. Aussi, à la fin de ce chapitre, quelques résultats fondamentaux de tomographie classique sont rappelés.

1.1 Historique

Ce paragraphe reprend essentiellement l'exposé de Rice [119] qui ouvrait la session tenue à Vienne : "Stellar surface structure", par un rappel sur le principe et les travaux pionniers en imagerie Doppler (se reporter également aux ouvrages et revues [87, 138]).

C'est à Deutsch [49] que l'on doit les premiers efforts faits en imagerie Doppler. Le but était alors de trouver la distribution en abondance d'un élément chimique à la surface de l'étoile. La résolution des instruments de l'époque ne permettait pas alors d'exploiter toute l'information contenue dans la mesure. Seule était prise en compte la variation de la largeur équivalente des raies¹ ce qui est une version pauvre de l'imagerie Doppler. La méthode reposait sur une décomposition en harmoniques sphériques des fonctions. L'inconvénient majeur était que, dans le souci d'obtenir une solution analytique, il tronquait la série pour ne garder que les premiers coefficients. Ainsi l'image obtenue présentait très peu de détails. Il appliqua sa méthode aux étoiles très magnétiques de type Ap. La même technique fut utilisée dans les années 70 par B. Wehlau [142] (à qui le symposium IAU d'octobre 95: "Stellar surface structure" fut dédié), Rice [118] et Pyper [111]. Il s'écoula une bonne dizaine d'années avant que la déformation du profil de raie, par des inhomogénéités en surface de l'étoile, soit prise en compte.

C'est à Falk, étudiant en thèse de Wehlau, que l'on doit l'expression de l'imagerie Doppler telle qu'elle est conçue encore aujourd'hui. Il proposa d'approcher la raie intrinsèque par un profil Gaussien [58]. La méthode de résolution reposait là encore sur une décomposition en harmoniques ce qui, comme dans les travaux précédents, ne permettait d'obtenir qu'une solution très grossière, la série étant réduite à ses premiers termes. Ainsi, l'information contenue dans la déformation du profil était en quelque sorte perdue. Khokhlova en 1975 fut le premier à réaliser que toute l'information est contenue dans la déformation locale des profils de raies. Il mit alors en oeuvre une méthode d'essai-erreurs. Suite à la conférence IAU qui se déroula en 1979 à Montréal, l'équipe d'américains: B. Wehlau, J.B. Rice, et de russes: A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, V.L. Khokhlova, A.G. Iagola, décidèrent de mettre leurs compétences, acquises respectivement dans le domaine des détecteurs et des codes numériques, en commun. Cette collaboration se traduisit par l'imagerie d'une étoile Ap: ϵ UMa². Une méthode très semblable fut mise en oeuvre par Vogt [139] huit années plus tard. Il appliqua sa méthode au système RS CVn HR 1099. Des améliorations furent apportées par l'équipe d'astronomes russes [66, 67] qui modélisèrent plus finement les raies intrinsèques (voir section suivante pour une définition) par un profil de Voigt. Les étoiles Ap étaient là aussi la cible. En alternative au code de Tikhonov développé par Goncharsky [66], Vogt proposa un code de maximum d'entropie: MEMSYS [138].

Dans l'idée de contraindre le problème d'imagerie Doppler que d'aucuns sentaient mal posé et instable, A. Collier Cameron [33] a développé récemment un modèle dit à deux

1. La largeur équivalente est grossièrement le flux total d'une raie c'est à dire "son intégrale" (voir par exemple [124] p.40 pour une définition plus précise.)

2. Il est intéressant de constater que les premières étoiles cibles de l'imagerie Doppler sont aujourd'hui les premières où est tentée l'imagerie Zeeman Doppler. Ceci vient naturellement de l'activité magnétique et de la luminosité de ces objets, suffisantes pour assurer un rapport correct du signal sur bruit.

températures. Nous aurons l'occasion de revenir sur celui-ci. Enfin, citons la méthode d'imagerie Doppler Zeeman [127, 56, 51, 55, 54] dont le principe, par rapport à l'imagerie Doppler reste inchangé, mais dont le but est la reconstruction des paramètres de Stokes (directement reliés au champ magnétique) et non plus l'abondance ou la température en surface de l'étoile.

1.2 Description générale de la technique d'imagerie Doppler

La technique d'imagerie Doppler vise à reconstruire la distribution du flux d'intensité lumineuse en surface à partir de spectres enregistrés au cours de la rotation de l'étoile sur elle même. Elle repose sur l'information spatiale que donne le décalage en longueur d'onde par effet Doppler. On montre que la valeur du spectre en une abscisse donnée contient l'information sur le lieu géométrique des points de la surface de l'étoile qui, animés de la même vitesse, ont donné le même décalage en longueur d'onde. Ces familles de points sont appelées courbes d'iso-vitesse. Autrement dit (en admettant quelques approximations que nous lèverons par la suite), en imagerie Doppler la fonction cherchée est connue par ses intégrales sur des courbes (voir Fig. 1.1). L'intégrale de toutes les courbes réunies donne

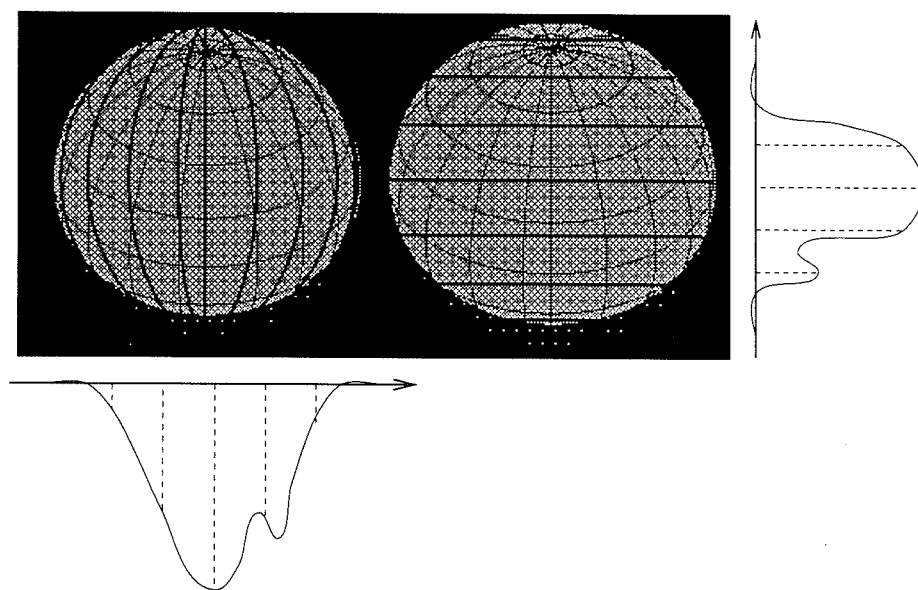


FIG. 1.1 – L'imagerie Doppler consiste en la reconstruction d'une fonction de la sphère dans \mathbb{R}^+ connaissant les intégrales de cette même fonction sur des familles de courbes. La somme de ces intégrales pour une famille donnée vaut l'intégrale de la fonction sur la demi-sphère visible. En haut sont décrites deux familles de courbes (cercles en gras). Les deux fonctions correspondantes, donnant la valeur de l'intégrale sur chaque courbe, sont représentées en bas et à droite.

l'intégrale de la fonction sur la demi-sphère visible. Comme les courbes d'iso-vitesse varient avec la rotation de l'étoile, le spectre mesuré évolue également avec la rotation. De cette série temporelle on cherche donc à déduire la carte en température.

1.2.1 Géométrie et notations

Avant d'introduire le modèle physique tel qu'il est classiquement considéré en imagerie Doppler, nous décrivons les différents référentiels et quelques notations utilisées par la suite.

Paramètres

On appelle **axe de visée** l'axe joignant l'observateur à l'étoile. L'axe de rotation est incliné d'un angle α sur l'axe de visée. L'étoile de **rayon** R tourne sur elle même à la **vitesse angulaire** Ω . On note $\phi \in [0, 1]$ la **phase** c'est-à-dire l'angle dont l'étoile a tourné par rapport à une direction arbitraire de référence.

Référentiels

Les définitions des trois référentiels reposent sur les deux axes caractéristiques : l'axe de rotation et l'axe de visée. Le premier référentiel est lié à l'observateur. Les suivants sont des référentiels de l'étoile : l'un est fixe par rapport à l'observateur, l'autre tourne (et donc est lié à l'étoile). Nous définissons ainsi les trois référentiels orthonormés suivants (voir Fig. 1.2) :

- (o, o_1, o_2, o_3) : le référentiel de l'observateur tel que o_3 soit un vecteur directeur unitaire de l'axe de visée et o_2 soit perpendiculaire à l'axe de rotation et à l'axe de visée. Ce référentiel est fixe dans le temps.
- (o, e_1, e_2, e_3) : le référentiel de l'étoile tel que e_3 soit un vecteur directeur unitaire de l'axe de rotation et $e_2 = o_2$. Ce référentiel est également fixe.
- (o, r_1, r_2, r_3) : le référentiel tournant tel que r_3 soit un vecteur unitaire de l'axe de rotation : $r_3 = e_3$. Ce référentiel est lié à l'étoile c'est à dire tourne avec elle.

On désigne par X_v l'axe d'origine o et de direction v . L'axe de rotation est incliné d'un angle α par rapport à l'axe de visée. Nous noterons $(\zeta_{o_1}, \zeta_{o_2}, 1 \pm \sqrt{\zeta_{o_1}^2 + \zeta_{o_2}^2})^t$ les coordonnées d'un **vecteur ζ de la sphère unitaire** dans le repère de l'observateur (o, o_1, o_2, o_3) (de même dans les deux autres repères en changeant d'indice).

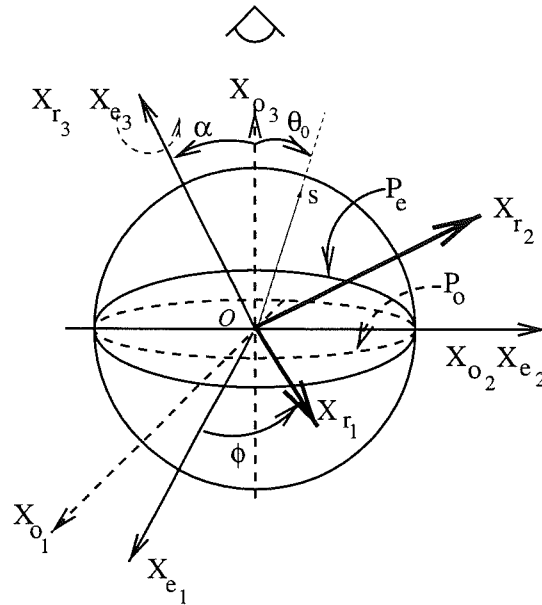


FIG. 1.2 – Référentiels de travail en imagerie Doppler. Les systèmes (o, o_1, o_2, o_3) et (o, e_1, e_2, e_3) sont fixes par rapport à l'observateur, (o, r_1, r_2, r_3) lié à l'étoile tourne avec elle.

Ainsi on passe d'un référentiel à l'autre par les matrices de rotation suivantes :

$$\begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ o_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Vitesse radiale

Du fait de la rotation de l'étoile, chacun des points est animé d'une vitesse $R\Omega \wedge \zeta$. La **vitesse radiale** v_{rad} est la composante de ce vecteur sur l'axe de visée. L'angle θ_0 que fait l'axe de visée avec le vecteur ζ dépendant de la phase ϕ , il en est de même de la vitesse radiale. Il est montré ci-après que les courbes d'iso-vitesse qui sont les lieux géométriques des points ayant même vitesse radiale à la phase ϕ , ne dépendent que de la coordonnée $\zeta_{e_2} \equiv \zeta_{o_2}$. En effet, par définition de la vitesse radiale, en notant $x \cdot y$ le produit scalaire standard de deux vecteurs de \mathbb{R}^n et en notant $(x|y|z) = \det(x, y, z)$ le produit mixte de trois vecteurs de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} v_{rad} &= (R\Omega \mid \zeta \mid o_3) \\ &= (R\Omega \wedge \zeta) \cdot o_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= R \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \zeta_{e_1} \\ \zeta_{e_2} \\ 1 \pm \sqrt{\zeta_{e_1}^2 + \zeta_{e_2}^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix}, \\
&= R\Omega \sin \alpha \zeta_{e_2}.
\end{aligned}$$

Les courbes d'iso-vitesse sont ainsi des cercles centrés sur l'axe X_{e_2} . Dans le paragraphe suivant nous verrons que l'ensemble des points visibles des courbes d'iso-vitesse sont des demi-cercles. Dans le référentiel tournant, la coordonnée ζ_{e_2} est une fonction de ϕ . La vitesse radiale est donc une fonction de ϕ et de ζ notée: $v_{rad}(\phi, \zeta)$.

Sont appelés plan du ciel P_o et plan équatorial P_e les plans respectifs (o, o_1, o_2) et (o, e_1, e_2) . La projection des courbes d'iso-vitesse sur les plans P_e et P_o sont donc les droites $\zeta_{e_2} \equiv \zeta_{o_2} = \text{constante}$.

Hémisphère visible

Définissons maintenant la partie visible de l'étoile. En effet l'observateur ne perçoit qu'un hémisphère de l'étoile. Dans le référentiel de l'observateur cet hémisphère est l'ensemble des points dont la troisième coordonnée est positive. Cet ensemble se projette très simplement sur tout le plan du ciel. C'est pourquoi ce dernier est souvent choisi comme plan de travail. Essentiellement parce que la fonction à reconstruire n'est fixe que dans un repère lié à l'étoile, le modèle est posé dans le référentiel tournant. Dans celui-ci, l'ensemble des points visibles dépend de la phase et est noté $V(\phi)$. La demi-sphère visible projetée sur le plan équatorial est, pour la partie supérieure, l'union d'un demi-disque et d'une demi-ellipse et, pour la partie inférieure, une demi-ellipse. L'ellipse est de demi-petit-axe $c = \cos \alpha$ dont un vecteur directeur est e_1 et de demi-grand-axe unitaire, voir Fig. 1.3. Notons χ^+ (resp. χ^-) les **indicatrices** du domaine visible c'est-à-dire les fonctions indiquant la partie visible pour chacun des disques où se projettent les deux hémisphères nord (resp. sud). Elles sont ainsi définies par :

$$\begin{aligned}
\chi^+(\zeta_{e_1} e_1 + \zeta_{e_2} e_2) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta_{e_1} \leq c\sqrt{1 - \zeta_{e_2}^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \\
\chi^-(\zeta_{e_1} e_1 + \zeta_{e_2} e_2) &= \begin{cases} 1 & \text{si } \zeta_{e_1} \leq -c\sqrt{1 - \zeta_{e_2}^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit f une fonction ayant son support sur la sphère unitaire S^{n-1} de \mathbb{R}^n . Nous notons $(f^+, f^-)^t$ les valeurs prises par f sur les hémisphères supérieurs et inférieurs dans le

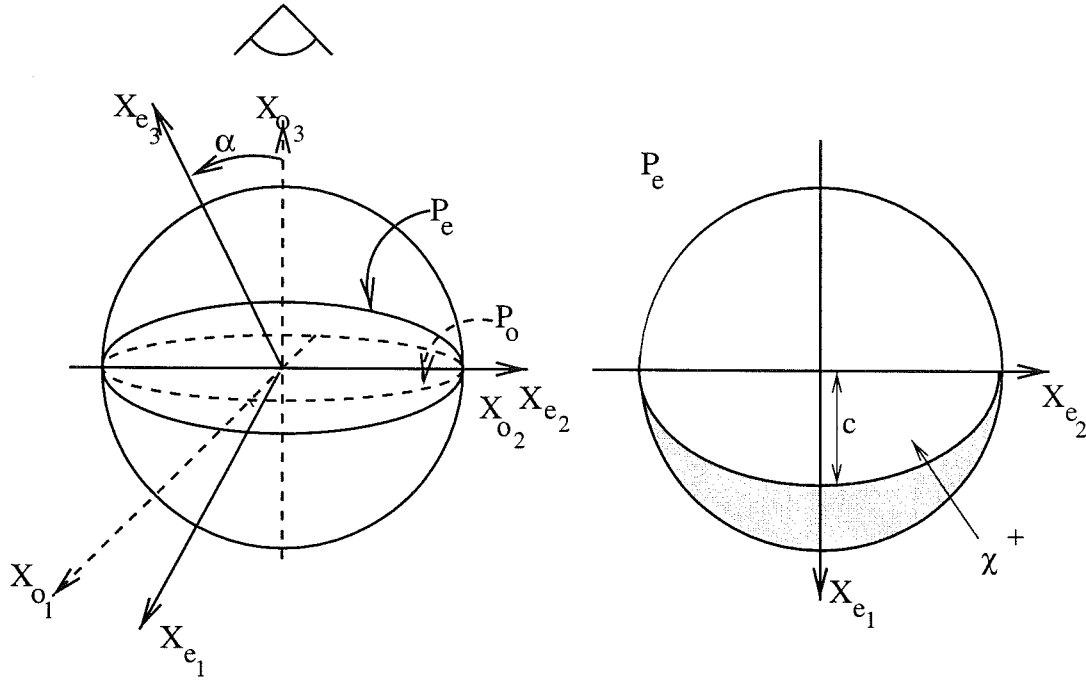


FIG. 1.3 – Hémisphère visible de l'étoile. Les indicatrices sont limitées par des demi-ellipses. Elles sont fixes dans les référentiels de l'observateur et de l'étoile mais tournent avec ϕ dans le référentiel tournant.

référentiel tournant lié à l'étoile.

1.2.2 La mesure en imagerie Doppler : modèle physique standard

Exposons maintenant le modèle physique standard. Soit $T(\zeta)$ la fonction à reconstruire où T est la température.³ Nous verrons dans le chapitre suivant que le choix de ce paramètre n'est pas anodin parce que la linéarité des mesures en dépend.

L'observation d'une étoile avec un télescope doté d'un spectromètre permet d'obtenir son spectre sur une certaine gamme de longueurs d'ondes. On distingue dans ce spectre le continuum, des raies. De par la rotation de l'étoile, chaque raie est élargie par effet Doppler. Le profil des raies dépend de la distribution de la fonction cherchée $T(\zeta)$.

Raie spectrale locale

On s'intéresse à une raie donnée du spectre. Les éléments chimiques et les transitions sélectionnées dans le cas particulier de l'imagerie Doppler des T Tauri seront précisés dans la seconde partie.

3. Le flux, l'abondance d'un élément chimique, le facteur de remplissage[49, 50]... sont parfois choisis. Le modèle, dans son principe, reste inchangé mais la résolution peut être très différente.

Soit une raie à la longueur d'onde λ_0 telle que la mesurerait un observateur placé sur l'étoile. Les interactions locales entre le champ de rayonnement et les atomes contribuent à élargir la raie. On trouvera un résumé des différentes causes d'élargissement dans la thèse d'I. Joncour [87]. On peut distinguer trois causes d'élargissement :

- **l'élargissement naturel** : dû à la durée limitée des états excités. Le profil de la raie lié à ce seul effet peut être modélisé par une Lorentzienne. L'élargissement naturel n'est observable qu'en laboratoire. Il reste négligeable par rapport aux autres sources d'élargissement.
- **l'élargissement Doppler** dû à l'agitation thermique des atomes. La longueur d'onde des photons émis sera donc décalée. D'une distribution des vitesses Maxwellienne est déduit un profil de raie Gaussien.
- **l'élargissement collisionnel** dû aux interactions avec les autres particules neutres ou chargées. On modélise également l'ensemble global de ces interactions (effet Stark, de résonance, force de Van der Waals ...) par une Lorentzienne.

Le profil final est obtenu en convoluant les deux Lorentziennes et la Gaussienne. On obtient ainsi un profil de Voigt. En pratique la modélisation de Milne-Eddington [101] est souvent utilisée. Les paramètres sont ajustés après calcul du profil théorique par un code numérique de transfert de rayonnement (en particulier nous nous sommes servis du code de Gustafsson, voir deuxième partie). Dans la suite cette fonction normalisée est appelée profil local ou intrinsèque de la raie et est notée $H_0(\lambda, T(\zeta))$.

Corrections dues à l'atmosphère de l'étoile

Le spectre en chaque point de l'étoile dépend de la température en ce point et s'écrit comme le produit du profil intrinsèque par l'énergie rayonnée, $I_{\lambda_0}(T(\zeta))$. Le spectre du corps noir permet d'estimer cette dernière quantité évaluée par la fonction de Planck (voir [106] p.14) :

$$I_{\lambda_0}(T) = \frac{2hc_e^2}{\lambda_0^5} \frac{1}{e^{hc_e/\lambda_0 KT} - 1} \quad (\text{W m}^{-2} \text{ Hz})$$

où c_e , K , h sont respectivement : la célérité de la lumière, les constantes de Boltzman et de Planck.

Le rayonnement interagit avec la matière des différentes couches traversées. Ainsi les photons observés proviendront de profondeurs géométriques différentes de l'étoile selon leur fréquence. La profondeur optique fournit ([124] p.72), les dimensions de la zone de l'étoile d'où proviennent ces photons. Les rayons qui arrivent du bord du disque ($\theta_0 = 90^\circ$) sont plus absorbés, du fait de leur inclinaison, que les rayons qui, provenant du centre du disque ($\theta_0 = 0^\circ$), arrivent à la verticale. On verra donc "plus profondément" au centre

qu'au bord (limbe). Cet effet est corrigé par la loi d'assombrissement centre-bord (en anglais : limb darkening law) fonction de l'angle entre l'axe de visée et la normale au point considéré :

$$W(\cos \theta_0(\phi, \zeta)) = 1 - \epsilon + \epsilon \cos \theta_0(\phi, \zeta),$$

où ϵ , le coefficient d'assombrissement centre-bord, dépend de la fréquence considérée. Grâce au tableau expérimental des valeurs mesurées pour le cas du Soleil (Allen [3] p.170), on peut obtenir le profil de raie corrigé de l'atmosphère :

$$I_{\lambda_0}(T(\zeta)) H_0(\lambda, T(\zeta)) W(\cos \theta_0(\phi, \zeta))$$

La faible sensibilité de la reconstruction au coefficient d'assombrissement centre-bord a été montrée par Unruh [135] dans sa thèse. Une erreur d'estimation de ce paramètre modifie éventuellement les contrastes mais n'introduit pas de "nouvelles taches". Aussi nous nous souviendrons dans la suite que, d'un point de vue qualitatif, la fonction d'assombrissement centre-bord ne joue pas un rôle essentiel. Nous nous attacherons donc à analyser en priorité l'influence de la géométrie sur le problème inverse.

Raie spectrale observée

De par la rotation, chaque point de l'étoile est animé d'une vitesse radiale $v_{rad}(\phi, \zeta_{r_2})$, voir section 1.2.1. Par effet Doppler, la fréquence reçue sera donc décalée. Ce décalage étant fonction de la vitesse radiale, il dépend ainsi de la phase et de la seule coordonnée sur l'axe X_{r_2} . Il est donné par la loi :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \lambda(\phi, \zeta)}{\lambda_0} &= \frac{v_r(\phi, \zeta)}{c_e}, \\ &= \frac{\Omega R}{c_e} (\sin \alpha) (\zeta \cdot e_2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Le décalage Doppler maximal $\Delta \lambda_{max}$, a lieu pour les points situés sur le bord du disque et vaut :

$$\Delta \lambda_{max} = \frac{\Omega R}{c_e} \lambda_0 \sin \alpha.$$

Le profil mesuré S résulte de l'intégration sur la demi-sphère visible des profils locaux décalés en longueur d'onde. Comme l'observateur ne perçoit que la composante du vecteur de surface élémentaire sur l'axe de visée, $\cos \theta_0(\phi, \zeta) d\zeta$, la mesure est en définitive, en notant $d\zeta$ la surface élémentaire sur la sphère qui est la mesure de Lebesgue dans \mathbb{R}^n :

$$S(\phi, \lambda) = \int_{V(\phi)} H_0(\lambda - \Delta \lambda(\phi, \zeta), T(\zeta)) I_{\lambda_0}(T(\zeta)) W(\cos \theta_0(\phi, \zeta)) \cos \theta_0(\phi, \zeta) d\zeta. \quad (1.2)$$

Le problème d’**imagerie Doppler** repose ainsi sur l’estimation de la fonction $T(\zeta)$ connaissant $S(\phi, \lambda)$, $\forall \phi \in [0, 1]$ et $\forall \lambda \in [\lambda_0 - \Delta\lambda_{max}, \lambda_0 + \Delta\lambda_{max}]$.

Dans le cas d’une raie monochromatique pure c’est à dire dont le profil local H_0 est la fonction de Dirac au point λ_0 , les mesures $S(\phi, \lambda)$ s’interprètent, à phase ϕ fixée, comme l’intégrale de la fonction cherchée, pondérée par l’assombrissement centre-bord, sur les points de l’étoile qui ont donné le même décalage Doppler. La mesure $S(\phi, \lambda)$ est donc l’intégrale sur la courbe d’iso-vitesse définie de manière unique par le couple (ϕ, λ) dont nous avons vu (dans le paragraphe intitulé “vitesse radiale”) qu’elle était un cercle centré sur l’axe X_{e_2} (voir Fig. 1.4). Il existe donc une relation univoque entre les points du spectre et les courbes d’iso-vitesse. A la fin de ce chapitre, nous verrons que cette description de la mesure met en évidence l’analogie de l’imagerie Doppler avec la tomographie.

1.2.3 De l’évolution temporelle des spectres à la distribution spatiale du flux

Illustrons le principe par le cas d’école d’une étoile avec une tache unique. Une tache désigne ici une région de la sphère dont la température serait différente de celle du reste de la sphère. Le profil mesuré dans ce cas diffère de celui d’une étoile homogène. En effet la variation de flux liée à la présence de la tache introduit des distorsions dans le profil, à la longueur d’onde correspondant à la vitesse radiale de la tache. L’étoile tournant, la vitesse de la tache change et la distorsion évolue dans le profil à des longueurs d’ondes différentes, voir Fig. 1.4. Si la tache se trouve au pôle de l’étoile, sa vitesse radiale est nulle et ne change pas au cours de la rotation : la distorsion induite reste à la longueur d’onde λ_0 dans le profil mesuré. Par opposition, une tache située à l’équateur passe de la vitesse radiale minimale à la vitesse radiale maximale : la distorsion évolue ainsi le long du spectre avec la phase de rotation de l’étoile. De l’évolution temporelle des spectres est déduite une information sur la distribution spatiale du flux.

La mesure en imagerie Doppler est illustrée par le schéma de la figure 1.5. Les coordonnées polaires de ζ c’est à dire la latitude et la longitude dans le référentiel lié à l’étoile sont (θ_r, ψ_r) . Sur cette dernière les courbes d’iso-vitesse,

$$s = \cos \theta_r \sin (\psi_r + \phi), \quad (1.3)$$

sont représentées pour deux phases différentes et un angle particulier de l’inclinaison, dans une représentation plate carrée. Les courbes d’iso-vitesse sont ainsi paramétrées par ϕ et la coordonnée notée s sur l’axe X_{e_2} . Cette représentation met en évidence le maillage à la surface de l’étoile. En effet, le même motif est translaté de la phase ϕ dont a tourné l’étoile à chaque nouvelle observation. Cette carte montre ainsi clairement les trous en phase obtenus si les observations ne sont pas équi-réparties dans le temps : des régions de

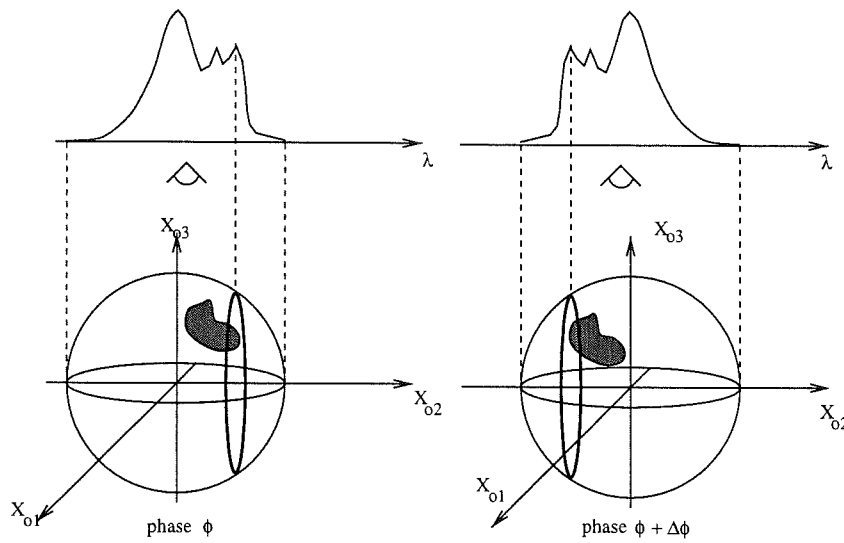


FIG. 1.4 – Mesure en imagerie Doppler du flux. Le profil est élargi par effet Doppler. L'ensemble des points de même vitesse radiale, qui donneront donc le même décalage en longueur d'onde, est un cercle. Le décalage est proportionnel à $\zeta_{o2} \equiv \zeta_{e2}$ (trait pointillé). Les distorsions dans le spectre sont ainsi corrélées à la vitesse de la tache à la date ϕ .

l'étoile ne sont pas ou peu mesurées. Par ailleurs elle donne une idée de la résolution, accrue aux latitudes intermédiaires entre l'équateur et les pôles. Enfin elle explique l'évolution des distorsions dans le spectre. Prenons l'exemple du point x de longitude $\psi_r \sim 220^\circ$ et de latitude $\theta_r \sim 70^\circ$. A la phase $\phi = 0$, ce point se trouve sur la courbe d'iso-vitesse $s = 0.2$ et passe sur la courbe d'iso-vitesse $s = -0.2$ un quart de période après. La vitesse de passage du point x d'une courbe d'iso-vitesse à une autre dépend de sa position. Notons que de par l'inclinaison de l'étoile, ici de 60° , la région dont la latitude est inférieure à -60° reste invisible quelle que soit la phase. On montrera facilement que l'ensemble des points visibles à la phase ϕ est donné par :

$$\theta_r \geq \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{\cos(\psi_r + \phi) \tan \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2(\psi_r + \phi) \tan^2 \alpha}}. \quad (1.4)$$

On en déduit que la région de latitude inférieure à $-\alpha$ n'est jamais visible et que la région dont les latitudes sont supérieures à α est visible quelque soit la phase.

Ces différentes représentations aident à comprendre intuitivement le lien entre les mesures et la fonction à reconstruire mais sont difficilement exploitables. Considérer l'imagerie Doppler comme un problème de tomographie généralisée nous a semblé prometteur. En effet la recherche en tomographie a bénéficié de l'intérêt porté à l'imagerie médicale (on peut aussi citer les travaux pionniers de Bracewell [28] appliqué à la reconstruction de signaux astrophysiques). Les travaux tant d'un point de vue théorique (existence, unicité,

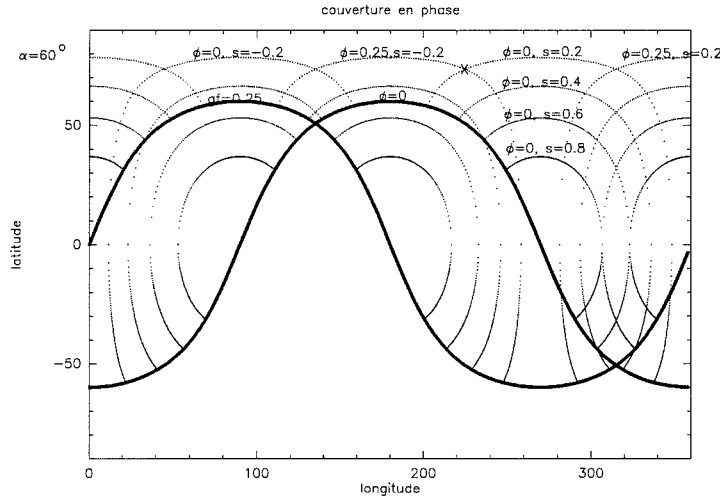


FIG. 1.5 – Courbes d’iso-vitesse (trait pointillé) dans une représentation plate carrée pour un angle d’inclinaison de $\alpha = 60^\circ$. Deux observations déphasées d’un quart de période sont représentées. La courbe en gras trace la frontière de visibilité pour chacune des phases. Ce maillage met en évidence la résolution selon les régions. La mesure est également expliquée : le point marqué de la croix passe de la courbe d’iso-vitesse $s = 0.2$ à la courbe $s = -0.2$. Tandis qu’un point du pôle reste dans la courbe d’iso-vitesse nulle, un point de l’équateur passera, au cours de la rotation de l’étoile, sur toutes les courbes d’iso-vitesse.

stabilité...) que pratique (codes numériques de reconstruction) se sont depuis, multipliés. L’analogie avec la tomographie offre d’une part un cadre mathématique souple et judicieux comme l’ont montré les nombreux travaux antérieurs. En particulier, ce formalisme rend plus aisé l’étude des opérateurs mis en jeu. D’autre part il suffira de transposer à l’imagerie Doppler des résultats dont l’exploitation prouve la robustesse. Dans notre cas il s’agira essentiellement d’adapter des codes numériques de reconstruction et des résultats sur l’échantillonnage [46, 45, 42, 48].

1.3 Définitions et rappels de tomographie

La tomographie consiste à reconstruire une fonction à partir de ses intégrales sur une famille de courbes. Un grand nombre d’applications s’expriment sous cette forme dans les domaines les plus divers. Quelques unes de ces applications sont exposées dans la première section avant d’aborder une définition plus précise de la transformée en tomographie et d’en donner les propriétés essentielles. L’inversion et l’unicité sont ensuite présentées.

Ce qui suit s’appuie essentiellement sur les ouvrages et article [59, 105].

1.3.1 Quelques applications

La tomographie trouve un vaste champ d'applications dans les domaines les plus divers : imagerie médicale, contrôle non destructif (par exemple de déchets radioactifs), microscopie électronique par transmission, acoustique, techniques d'observations en astrophysique. Quelques exemples sont présentés ici.

Imagerie médicale

L'imagerie médicale a sans doute contribué de manière décisive au développement des techniques de résolution de problèmes tomographiques.

Une technique très répandue en radiologie est la tomographie par transmission. La région d'intérêt (cerveau, os...) est traversée par un faisceau de rayons X. En géométrie parallèle (voir Fig. 1.6 de gauche), ces rayons sont parallèles. Un détecteur permet de mesurer l'atténuation du faisceau une fois que ce dernier a traversé l'objet. Une rotation de la source comme du détecteur est alors effectuée pour la mesure suivante. Une autre géométrie d'usage fréquent est la géométrie en éventail (voir Fig. 1.6 de droite), fan-beam scanning en anglais, où les rayons divergent à partir d'une seule source tournant autour de l'objet.

TOMOGRAPHIE PAR TRANSMISSION

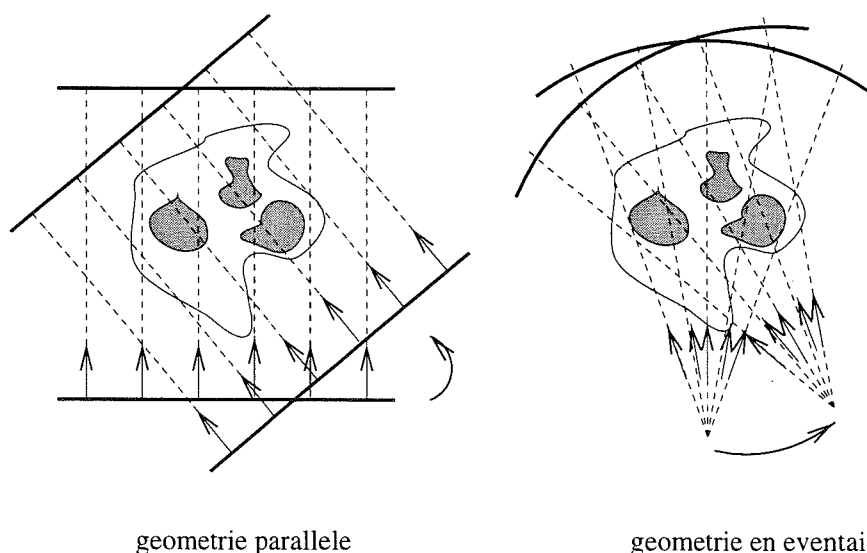


FIG. 1.6 – Tomographie par transmission : à gauche, les rayons X qui traversent l'objet sont parallèles. A droite, le faisceau est en éventail. Sources et capteurs tournent autour de l'objet.

La tomographie par émission nécessite d'injecter au patient un traceur radioactif. Des collimateurs placés tout autour de la personne permettent d'enregistrer l'activité pondérée par une fonction rendant compte de l'atténuation du faisceau par le milieu. Ici, c'est la localisation des points sources (là où la substance radioactive s'est fixée) et non la densité du milieu qu'il importe de trouver. Lorsqu'une seule particule est détectée, la technique est appelée SPECT de son nom anglais : Single Particle Emission Computerized Tomography. Lorsqu'une paire de particules, émises dans des directions opposées, est détectée, la technique est dite PET : Positron Emission Tomography. L'acquisition des données est dans ce cas très coûteuse du fait qu'il est nécessaire, pour une détection quasi simultanée des deux particules, d'avoir recours à des détecteurs très rapides.

Microscopie électronique par transmission

La microscopie électronique à transmission consiste essentiellement à mesurer une projection de l'objet : les électrons, accélérés par une différence de potentiel d'une centaine de kilovolts, traversent un échantillon d'une épaisseur supposée infiniment mince. Derrière une lentille, la figure de diffraction est enregistrée sur une plaque photo ou une caméra CCD. Ainsi les mesures donnent directement accès à la transformée de Fourier permettant de reconstruire la maille des polymères, l'agencement des sucres... Une rotation de l'échantillon permet de renouveler la mesure pour un autre angle d'incidence des rayons. En considérant cette fois l'épaisseur de l'échantillon et en renouvelant les mesures pour plusieurs angles d'inclinaison, le problème revient bien à un problème de tomographie en dimension 3. L'une des principales difficultés tient à la limitation de l'angle de rotation : on ne peut incliner l'échantillon de plus de 60° environ. D'autre part, l'objet étant incliné, sa distance au plan focal de la lentille varie d'un endroit à l'autre et la mise au point n'est donc pas bonne partout. Par ailleurs, les électrons auront tendance à casser les liaisons de covalences des polymères modifiant ainsi sa structure cristalline.

Techniques d'observation en astrophysique

Plusieurs techniques d'observations ont une écriture proche, voire équivalente, à celle d'un problème de tomographie classique.

L'interférométrie à deux télescopes permet de mesurer le module du spectre de l'objet [90, 96]. Son principe est identique à l'expérience des fentes de Young. Les signaux enregistrés sur les deux télescopes sont, en simplifiant considérablement le cas réel, additionnés. La sortie de l'interféromètre dépend de la différence de marche des signaux. Ceci donne dans le plan image des franges dont l'interfrange dépend de la séparation des télescopes projetée dans un plan perpendiculaire à l'axe de visée. On peut bien entendu utiliser les interférences produites par plus de deux télescopes. La technique est dite de

fermeture de phase. Si ces télescopes sont alignés, les données ne sont autres que la transformée de Fourier d'une mesure en tomographie classique à phase fixée. L'échantillonnage du plan (u, v) (espace de Fourier) se fait alors en changeant la position relative des télescopes et en exploitant la rotation de la Terre. Cette technique est connue sous le nom de super-synthèse d'ouverture. C'est sur ce principe que fonctionne le radio-télescope de Westerbork situé dans le nord-est de la Hollande. Il est constitué de 14 antennes de 25 mètres de diamètre, alignées est-ouest. En les combinant on obtient l'équivalent d'un radio télescope d'un diamètre de 3 kilomètres. Bracewell [29] a tiré parti de l'équivalence du problème d'interférométrie avec la tomographie en mettant en oeuvre un algorithme de rétroprojection filtré (voir section 1.3.3) où le filtre passe-bas n'est autre que celui déduit du carré de la fonction sinus cardinal.

Le problème de la reconstruction d'une fonction à partir de ses intégrales à l'extérieur d'un disque, trouve également une application dans le domaine de l'astrophysique en coronographie [107]. L'objectif de la coronographie est d'obtenir quelques informations sur la couronne. Pour cela, un masque crée artificiellement une éclipse. Considérons une latitude donnée du soleil (par rapport au plan perpendiculaire au plan du ciel) et le disque correspondant. L'observateur voit ce dernier par la tranche. La mesure coronographique intègre l'émission venant de la couronne sur les droites parallèles à la ligne de visée ne traversant pas le masque. Il s'agit donc bien du problème dit extérieur de la transformée de Radon.

1.3.2 Définitions et propriétés

Dans cette section une définition très générale du problème de tomographie est donnée. La transformée de Radon en est un cas particulier. Dans la suite, seule cette transformée est considérée; c'est pourquoi elle est examinée de manière plus précise.

Notons $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Schwartz c'est-à-dire l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à décroissance rapide et dont les dérivées sont également à décroissance rapide.

Définition 1 Soit Π un sous espace vectoriel de dimension k de \mathbb{R}^n avec $n \geq 2$ et Π^\perp son orthogonal, la **transformée k -plan** d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est alors définie par [59]:

$$\forall y \in \Pi^\perp, P_\Pi f(y) = \int_\Pi f(y + t) dt,$$

où dt est l'élément de surface élémentaire de dimension k sur Π .

Dans la plupart des applications, le sous espace Π sur lequel la fonction cherchée est intégrée, est soit de dimension $k = 1$ (droite) soit de dimension $k = n - 1$ (hyperplan). Lorsque $k = 1$, l'opérateur ci-dessus est appelé la transformée en rayon X tandis que

$k = n - 1$ coïncide avec la définition de la transformée de Radon classique :

Définition 2 Soit $\omega \in S^{n-1}$ et $s \in \mathbb{R}$, la **transformée de Radon** d'une fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par :

$$Rf(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) \, dx = \int_{\omega^\perp} f(s\omega + t) \, dt$$

La transformée de Radon est donc l'intégrale de la fonction sur les hyperplans de \mathbb{R}^n paramétrés par la variable du cylindre unité : $(\omega, s) \in (S^{n-1} \times \mathbb{R})$. Elle est paire par rapport aux deux variables : $Rf(-\omega, -s) = Rf(\omega, s)$. Dans la suite on cherche sous quelles conditions la fonction f est uniquement déterminée par sa transformée Rf . La transformée de Fourier de $g(\omega, s) \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ définie par rapport à la variable scalaire s est :

$$\hat{g}(\omega, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(\omega, s) \, ds.$$

De même la transformée de Fourier de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est définie par :

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx.$$

Le théorème qui suit, dit de **coupe-projection**, prouve l'injectivité de l'opérateur de transformée de Radon et a été à l'origine des premiers algorithmes de reconstruction.

Théorème 1 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors :

$$\widehat{Rf}(\omega, \sigma) = (2\pi)^{(n-1)/2} \hat{f}(\sigma\omega).$$

L'algorithme de reconstruction qui en découle est simple. En effet d'après ce théorème, il suffit de faire la transformée de Fourier des mesures par rapport à la variable scalaire pour obtenir une coupe de la transformée de Fourier de la fonction cherchée. En procédant ainsi pour toutes les directions et après transformée de Fourier inverse, la fonction f est déduite. Il faudra être vigilant dans la programmation de cet algorithme du fait que la transformée de Radon est échantillonnée sur un cylindre. En conséquence, la transformée de Fourier de la fonction (qui serait obtenue, d'après le théorème 1, par transformée de Fourier des mesures par rapport à la variable scalaire s) est échantillonnée sur une grille polaire et non sur une grille cartésienne, qui aurait permis l'utilisation de la transformée de Fourier rapide [105] p.119.

L'opérateur dual R^\sharp défini de $\mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ par :

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} Rf(\omega, s) g(\omega, s) \, ds d\omega = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) R^\sharp g(x) \, dx$$

est

$$R^\sharp g(x) = \int_{S^{n-1}} g(\omega, x \cdot \omega) \, d\omega.$$

Le théorème de rétroprojection qui suit est alors très utile pour l'inversion tant d'un point de vue théorique que pratique :

Théorème 2 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ alors :

$$(R^\sharp g) * f = R^\sharp (g * Rf),$$

où $*$ est l'opérateur de convolution, $g * Rf$ est la convolution par rapport à la variable scalaire s . Ainsi, afin d'inverser la transformée de Radon de f , on cherche la fonction g telle que $R^\sharp g$ soit peu différente de la distribution de Dirac. La formule d'inversion est un outil théorique précieux. Cependant nous verrons que d'un point de vue pratique, elle n'est pas utilisée telle quelle du fait du caractère mal posé de l'opérateur de Radon.

Soit I^α l'opérateur de Riez d'ordre α défini par :

$$\widehat{I^\alpha f}(\xi) = \|\xi\|^{-\alpha} \hat{f}(\xi),$$

où $\|x\|$ est la norme euclidienne du vecteur x . Pour $\alpha = 2$, cet opérateur n'est autre que l'inverse du Laplacien. Il sera considéré que cet opérateur appliqué à une fonction du cylindre $(S^{n-1} \times \mathbb{R})$ agit sur la variable scalaire.

Théorème 3 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ alors quel que soit $\alpha < n$,

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} R^\sharp I^{\alpha-n+1} g, \quad g = Rf.$$

Dans le cas particulier $\alpha = 0$, l'expression précédente devient :

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} R^\sharp I^{1-n} g. \quad (1.5)$$

En remarquant que $I^{1-n} h = H^{n-1} h^{(n-1)}$ où H désigne l'opérateur de Hilbert, c'est à dire tel que $\widehat{Hh}(\sigma) = -i \operatorname{sgn}(\sigma) \hat{h}(\sigma)$ et $h^{(n-1)}$ la dérivée $n-1$ ème de h alors :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{(n-2)/2}}{2} (2\pi)^{1-n} R^\sharp H g^{(n-1)} & \text{si } n \text{ est paire,} \\ \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{2} (2\pi)^{1-n} R^\sharp g^{(n-1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sous cette écriture, il apparaît clairement que la transformée de Radon, pour les dimensions impaires, est locale au sens où il suffit, pour évaluer la fonction en un point x , de connaître ses intégrales sur tous les hyperplans qui passent au voisinage de ce point. Cette importante remarque n'est plus vraie pour les dimensions paires puisque la transformée de Hilbert qui intervient n'est pas locale. Par ailleurs, dans l'équation (1.5), $\widehat{I^{1-n} h}(\sigma) = \|\sigma\|^{n-1} \hat{h}(\sigma)$, il est à remarquer que les hautes fréquences de la mesure $\hat{g}(\sigma)$ sont plus amplifiées du fait

de la présence du facteur en $\|\sigma\|^{n-1}$. Or dans un cadre discret, la mesure pour de grandes valeurs de σ n'est très certainement pas fiable. C'est pourquoi dans le théorème 2, le filtre g est cherché de manière à ce que sa décroissance soit assez rapide pour atténuer fortement les hautes fréquences des mesures. Le prix en est bien évidemment une diminution de la résolution de la solution. Le filtrage fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3.3 Inversion

L'algorithme de rétroprojection est crucial en imagerie médicale. Il repose sur le théorème 2 :

$$W_b * f = R^\sharp (w_b * Rf), \text{ avec } W_b = R^\sharp w_b.$$

On cherche donc à obtenir un filtre passe-bas de fréquence de coupure b :

$$\hat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \Phi(\|\xi\|/b), \text{ avec } \|\Phi\| \leq 1 \text{ et } \Phi(\|\xi\|) = 0 \text{ si } \|\xi\| \geq 1$$

Un exemple bien connu est :

$$W_b(x) = (2\pi)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b\|x\|)}{(b\|x\|)^{n/2}},$$

qui vérifie $\lim_{b \rightarrow \infty} W_b = \delta$ (J_k étant la fonction de Bessel de première espèce, d'ordre k). L'algorithme détaillé en dimension 2 est donné dans [59, 105]. Une majoration sur l'erreur de reconstruction, liée d'une part à l'intégration numérique, d'autre part à l'interpolation qui incombe dans le cadre de données discrètes, est précisée. Par ailleurs, un algorithme similaire pour résoudre la transformée de Radon atténuée avec atténuation constante peut être déduit du théorème 4 de [43, 79, 134].

En imagerie médicale, la transformée de Radon classique est souvent issue d'un modèle physique simplifié. En effet, en imagerie nucléaire par exemple (SPECT), on injecte au patient un marqueur radioactif dont la distribution f est cherchée. L'activité enregistrée résulte d'une atténuation du faisceau de source f . Les données sont modélisées par :

$$R_\mu f(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} e^{-\mu(x, \omega^\perp)} f(x) dx,$$

et la transformée est dite transformée de Radon atténuée. Hertle [79] a montré que si μ est une fonction linéaire, cette transformée est injective dans l'espace des distributions à support compact. La transformée de Radon atténuée comme la transformée de Radon classique ne sont que des cas particuliers de la transformée de Radon généralisée :

Définition 3 La transformée de Radon généralisée d'une fonction est l'opérateur qui lui associe :

$$R_\mu f(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) \mu(x, \omega, s) dx.$$

Ainsi la mesure de Lebesgue a simplement été remplacée par la mesure régulière et positive $\mu(x, \omega, s) dx$. Boman[17] a montré que si la fonction est réelle, analytique et positive, alors la transformée est injective. Il a par ailleurs prouvé [18] que dans la plupart des cas, cette transformation n'est pas inversible même si la mesure est une fonction de \mathcal{C}_0^∞ . Dans la suite, nous nous intéressons plus précisément à la transformée de Radon généralisée invariante par rotation.

Définition 4 Soit R la transformée de Radon généralisée qui à f fait correspondre l'image $Rf(\omega, s)$. Elle est dite **invariante par rotation** [112] si pour toute rotation $k \in \mathcal{O}(n)$:

$$Rf(\omega, s) = R(f \circ k)(k^{-1}\omega, s).$$

T. Quinto [112] en a montré l'injectivité dans la classe des fonctions à support compact, pour une mesure suffisamment régulière et vérifiant certaines hypothèses.⁴ D'un autre côté, Vertgeim [137] a prouvé que, dans l'espace de fonctions de Schwartz et de manière plus générale, pour des fonctions à décroissance rapide, on peut toujours trouver une mesure μ telle que la transformée de Radon généralisée invariante par rotation soit non injective.

4. En particulier la mesure μ ne doit pas s'annuler sur la diagonale, c'est à dire, si $U(t, s)$ est défini par : $\mu(x, \omega, s) = U(|x - s\omega|, s)$, alors il faut $U(0, s) \neq 0$.

Chapitre 2

Inversibilité dans un contexte de tomographie généralisée : approche analytique

Sommaire

2.1	De l'imagerie Doppler vers la tomographie	40
2.1.1	Modèle à deux températures	40
2.1.2	Expression de la mesure dans le cadre de ce modèle	41
2.1.3	Opérateur par blocs de quatre transformées de Radon généralisées obtenues par transformations unitaires	45
2.2	Unicité et stabilité des solutions	47
2.2.1	Équations de Volterra associées aux transformées de Radon généralisées invariantes par rotation	48
2.2.2	Inversibilité dans le cas des fonctions poids réduites aux indicatrices de l'hémisphère visible	56
2.2.3	Inversibilité : cas général avec approximations	62
2.2.4	Inversibilité : cas général sans approximations	67

L'imagerie Doppler consiste à estimer une fonction connaissant ses intégrales sur des lieux géométriques à la surface de l'étoile. Dans la plupart des applications, la fonction cherchée est la température ou le flux en chaque point visible à une phase au moins de la rotation de l'étoile. Un modèle physique plus simple, dit à deux températures, est introduit dans le but de faciliter l'étude de l'opérateur d'imagerie Doppler. La fonction cherchée est alors le facteur de remplissage, c'est à dire la fraction $f_s(\zeta)$ d'un élément de surface $d\zeta$

à la température T_{spot} de la tache par rapport à la fraction $(1 - f_s(\zeta))$ à la température T_{phot} de la photosphère. Cette fonction représente en quelque sorte la densité surfacique de taches sur la photosphère.

À la suite du modèle posé dans le premier chapitre, le problème est maintenant exprimé dans un cadre de tomographie généralisée. Plus précisément, l'opérateur d'imagerie Doppler se formalise par un opérateur de quatre blocs où chaque bloc représente une transformée de Radon généralisée invariante par rotation en dimension 2. La fonction poids associée est alors liée d'une part à la géométrie de la mesure (en particulier la difficulté vient du fait qu'à chaque observation, seul un hémisphère de l'étoile est visible), d'autre part aux fonctions poids que sont : (i) la loi d'assombrissement centre-bord $W(\cos \theta(\phi, \zeta))$, qui modélise la profondeur optique sur la ligne de visée et (ii) la projection sur l'axe de visée.

Au sujet du caractère mal posé de l'opérateur, son injectivité est étudiée. Quelques idées sur sa stabilité sont données. Sa surjectivité n'est pas abordée. Dans l'objectif de dégager les points les plus importants de cette étude de l'identifiabilité de la fonction $f_s(\zeta)$, nous considérons dans un premier temps des cas simplifiés ou particuliers de la fonction d'assombrissement centre-bord avant d'aborder le cas général.

Un des principaux résultats de cette analyse est la mise en évidence de fonctions du noyau : nous montrons que certaines fonctions symétriques par rapport à l'axe de rotation sont invisibles (leur mesure en imagerie Doppler est nulle). Nous aborderons également le problème de l'instabilité de l'inversion.

2.1 De l'imagerie Doppler vers la tomographie

2.1.1 Modèle à deux températures

L'opérateur d'imagerie Doppler tel que défini par le modèle standard en (1.2) est un opérateur non linéaire de par :

- la dépendance du profil local avec la température: la profondeur de la raie augmente lorsque la température décroît. Au delà d'une température minimale, cette variation est quasi linéaire. En deça la raie sature, voir deuxième partie et la thèse d'I. Joncour [87].
- l'intensité: la fonction de Planck est une fonction non linéaire de la température.

Par ailleurs, il est à noter que tandis que le flux bolométrique conserve la propriété d'additivité ($I(\zeta_1 + \zeta_2) = I(\zeta_1) + I(\zeta_2)$) il n'en est pas de même de la température. Or cette propriété est requise lorsqu'on régularise par le maximum d'entropie, voir section 3.1.3. Ainsi A. Collier Cameron [33] défend le choix du flux bolométrique sur la température comme carte à reconstruire. Il souligne la plus faible sensibilité au bruit des codes de

reconstruction, lorsque la fonction cherchée est le flux et non la température [36]. Enfin les simulations montrent que lorsque $T(\zeta)$ est la fonction cherchée, des températures très élevées sont souvent obtenues et qu'il faut, par conséquence, accorder une confiance toute relative aux valeurs trouvées [92]. Pour pallier ce défaut, un seuil est généralement fixé [78]. Néanmoins le modèle basé sur la recherche du flux bolométrique reste non linéaire de part la dépendance du profil intrinsèque avec le flux.

Adopter le modèle plus simple dit à deux températures proposé par A. Collier Cameron, revient à linéariser l'opérateur. Celui-ci est à ne pas confondre avec les premiers modèles introduits par Vogt et Penrod [139] et repris par Strassmeier [131] pour la cartographie de la binaire RS Canum Venaticorum HD 26337, dans lesquels la fonction cherchée n'est autorisée à prendre qu'une valeur de la température parmi deux fixées, ce qui contraint fortement la solution. Dans la suite, c'est au modèle de Collier Cameron que nous ferons référence en parlant de modèle à deux températures. Dans celui-ci, le profil local devient une fonction linéaire du flux lequel est calculé à partir des profils et des intensités obtenus pour les deux températures extrêmes considérées. Cette approximation reste valable pour une large gamme de températures. Cependant, les effets de saturation de la raie risquent d'introduire de sévères artefacts pour des températures trop basses ou trop hautes.¹

La température de la photosphère T_{phot} , et celle des taches T_{spot} , étant fixées, le facteur de remplissage $f_s(\zeta)$ est cherché. L'opérateur précédemment défini par (1.2) s'écrit alors :

$$S(\phi, \lambda) = \int_{V(\phi)} [(1 - f_s(\zeta)) H_0(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta), T_{phot}) I_{\lambda_0}(T_{phot}) + f_s(\zeta) H_0(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta), T_{spot}) I_{\lambda_0}(T_{spot})] W(\cos\theta_0(\phi, \zeta)) \cos\theta_0(\phi, \zeta) d\zeta.$$

Remarquons qu'une extension intéressante consisterait à introduire un modèle à N températures. La fonction à estimer serait alors le barycentre des N valeurs de flux fixées. Dans un contexte où la fonction prendrait des valeurs très différentes d'une région à l'autre, introduire les profils de plus de deux températures serait sans doute préférable. Entre autre, si des taches froides et chaudes coexistent, un modèle à trois températures est sans doute plus judicieux.

2.1.2 Expression de la mesure dans le cadre de ce modèle

Un développement simple de la dernière expression permet d'écrire les mesures sous la forme du produit de convolution du profil intrinsèque par le profil de rotation. Après déconvolution, le problème inverse se résume à celui de l'inversion d'une transformée de Radon généralisée invariante par rotation.

1. Pour fixer un ordre de grandeur, la raie du lithium modélisable à 6000 K est largement saturée à 8000 K.

Posons :

$$\begin{aligned} S_{phot}(\phi, \lambda) &= \int_{V(\phi)} H_0(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta), T_{phot}) I_{\lambda_0}(T_{phot}) W(\cos \theta_0(\phi, \zeta)) \cos \theta_0(\phi, \zeta) d\zeta, \\ \tilde{S}(\phi, \lambda) &= S(\phi, \lambda) - S_{phot}(\phi, \lambda) \end{aligned} \quad (2.1)$$

et

$$H(\lambda) = H_0(\lambda, T_{spot}) I_{\lambda_0}(T_{spot}) - H_0(\lambda, T_{phot}) I_{\lambda_0}(T_{phot}).$$

On obtient ainsi,

$$\tilde{S}(\phi, \lambda) = \int_{V(\phi)} f_s(\zeta) H(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta)) W(\cos \theta_0(\phi, \zeta)) \cos \theta_0(\phi, \zeta) d\zeta.$$

Le décalage Doppler $\Delta\lambda(\phi, \zeta)$ étant proportionnel à la coordonnée $\zeta \cdot e_2$, la mesure s'écrit comme le produit de convolution :

$$\tilde{S}(\phi, \lambda) = H(\lambda) * G(\phi, \lambda). \quad (2.2)$$

Dans le cas d'une surface homogène, la fonction $G(\phi, \lambda)$ est appelée profil de rotation [68]. Quelle que soit la date d'observation, le flux reçu est alors celui d'une demi-sphère à température constante. Le profil G ne dépend donc plus de la phase et est très simplement calculé dans le plan du ciel. Si g_1 désigne la longueur d'un demi-segment perpendiculaire à l'axe X_{o_2} et limité par le disque (voir Fig. 2.1), alors

$$\begin{aligned} g_1 &= \sqrt{1 - x_{o_2}^2}, \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right)^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} G(\Delta\lambda) &= (T_{phot}) \int_{-g_1}^{g_1} 1 - \epsilon + \epsilon \sqrt{1 - (\zeta_{o_1} + \zeta_{o_2})^2} d\zeta_{o_1}, \\ &= 2(1 - \epsilon) \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right)^2} + \frac{\pi}{2} \epsilon \left(1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_{max}}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Dans notre cas, $G(\phi, \Delta\lambda)$ est l'intégrale pondérée de la fonction cherchée f_s , sur les courbes d'iso-vitesse. Ainsi, après déconvolution, on cherche à estimer cette fonction connaissant :

$$G(\phi, \lambda) = \int_{\substack{\Delta\lambda(\phi, \zeta) = \lambda_0 - \lambda \\ \zeta \in V(\phi)}} f_s(\zeta) W(\cos \theta_0(\phi, \zeta)) \cos \theta_0(\phi, \zeta) d\zeta \quad (2.3)$$

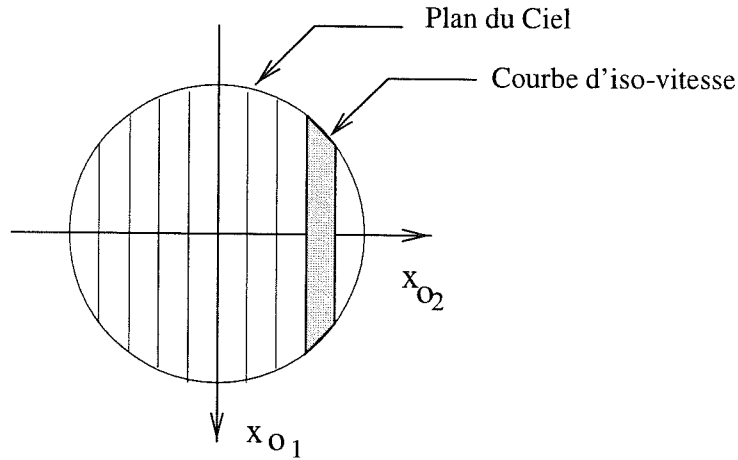


FIG. 2.1 – Courbes d'iso-vitesse ($\Delta\lambda = \text{constante}$) dans le plan du ciel. Le profil de rotation G , pour une étoile homogène, est l'intégrale de la fonction d'assombrissement centre-bord sur ces droites.

avec

$$\Delta\lambda(\phi, \zeta) = \frac{\Omega R \lambda_0 \sin \alpha}{c_e} \zeta \cdot e_2.$$

Par abus (mais aussi selon les notations modernes...) nous avons noté $d\zeta$ l'élément d'intégration². Nous adoptons maintenant le formalisme standard de la tomographie. Les calculs sont menés dans le plan équatorial de l'étoile, P_e . La sphère unitaire est ainsi projetée orthogonalement, suivant l'axe de visée, sur deux disques : l'un pour l'hémisphère supérieur, l'autre pour l'hémisphère inférieur. Notons $\omega = (\cos \phi, \sin \phi)^t$ et $s = \zeta \cdot e_2$. Ainsi, comme $\omega = e_2$ et $\omega^\perp = -e_1$, les courbes d'iso-vitesse " $\zeta_{e_2} = \text{constante}$ ", deviennent les droites d'équation : $s\omega + t\omega^\perp, \forall t \in \mathbb{R}$. Soit x la projection de ζ dans le plan P_e , $x^2 = \|x\|^2$ le carré de la norme euclidienne de x . Désignant par D le disque unitaire de \mathbb{R}^2 , les courbes d'iso-vitesse projetées sur les deux disques sont également les hyperplans (des droites ici) : $H(\omega, s) = \{x \in D \mid x \cdot \omega = s\}$. Le changement de variable de la sphère sur le plan introduit le Jacobien : $J(x_{r_1} r_1 + x_{r_2} r_2) = \sqrt{1 - x_{r_1}^2 - x_{r_2}^2}$. Par la suite la fonction cherchée est notée $f(x)$. Elle est définie par,

$$f(x) = (f^+(x), f^-(x))^t$$

avec

$$f^+(x) = \frac{f_s(x_{r_1} r_1 + x_{r_2} r_2 + \sqrt{1 - x_{r_1}^2 - x_{r_2}^2} r_3)}{J(x_{r_1} r_1 + x_{r_2} r_2)},$$

2. En notant θ l'angle d'un point ζ de la sphère avec l'axe X_{r_2} et ψ l'angle défini par $\psi = \arctan(x_{r_2}/x_{r_1})$ alors un élément d'aire sur la sphère est $d\zeta = \sin \theta d\theta d\phi$. Dans cette notation, les courbes d'iso-vitesse sont simplement les lieux géométriques : $\theta = C^{\text{ste}}$ et ainsi, après déconvolution par le profil intrinsèque on écrirait dans (2.3) $d\phi$ à la place de $d\zeta$.

$$f^-(x) = \frac{f_s(x_{r_1}r_1 + x_{r_2}r_2 - \sqrt{1-x_{r_1}^2-x_{r_2}^2}r_3)}{J(x_{r_1}r_1 + x_{r_2}r_2)}. \quad (2.4)$$

Par ailleurs :

$$\cos \theta_0(\phi, \zeta(x)) = \begin{cases} c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1} & \text{si } \zeta \cdot e_3 > 0 \text{ (hémisphère sup.)} \\ -c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Les fonctions poids associées aux hémisphères respectivement supérieur et inférieur en projection sur P_e peuvent alors être définies. Elles résultent des produits de la fonction d'assombrissement centre-bord par l'indicatrice de la partie visible de l'étoile :

$$\begin{aligned} \mu^+(x) &= W\left(c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1}\right) \left(c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1}\right) \chi^+(x), \\ \mu^-(x) &= W\left(-c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1}\right) \left(-c\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-c^2}x_{e_1}\right) \chi^-(x) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Posons $f(x) \cdot \mu(x) = f^+(x)\mu^+(x) + f^-(x)\mu^-(x)$ le produit scalaire de $f = (f^+, f^-)^t$ par $\mu = (\mu^+, \mu^-)^t$. Désignons par $L^2(D)$ l'espace des fonctions de D de carré sommable. L'opérateur linéaire précédemment défini s'écrit comme la transformée de Radon vectorielle :

$$\begin{aligned} G : (L^2(D))^2 &\longrightarrow L^2(S^1 \times \mathbb{R}) \\ (f^+, f^-)^t &\longmapsto g(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) \cdot \mu\left((x \cdot \omega)\omega + (x \cdot \omega^\perp)\omega^\perp\right) dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(s\omega + t\omega^\perp\right) \cdot \mu\left(s\omega + t\omega^\perp\right) dt \end{aligned}$$

Dans le tableau ci-dessous sont résumées les différences et similitudes essentielles entre l'opérateur d'imagerie Doppler tel qu'il vient d'être défini et l'opérateur en tomographie

X ou en imagerie nucléaire :

	TOMOGRAPHIE	IMAGERIE DOPPLER
• collimation	détecteur	distance étoile-observateur
• variable de shift	position sur le récepteur	effet Doppler
• variable angulaire	rotation du détecteur	rotation de l'étoile
• fonction poids	cste : en rayons X $\mu(x, \omega, s)$: nucléaire	$\mu((x.\omega)\omega + (x.\omega^\perp)\omega^\perp)$
	$\forall \phi \in [0, 2\pi], \forall x \in D,$ $f(x)$ est mesurée	$\forall \phi \in [0, 2\pi], \exists x \in D,$ $f(x)$ n'est pas mesurée
• support des fonctions	disque	deux disques
• domaine de définition de g	$\phi \in [0, 2\pi], s \in [-1, 1],$	$\phi \in [0, 2\pi], s \in [-1, 1]$
• périodicité	$\pi^1 : g(-\omega, -s) = g(\omega, s)$	$2\pi : g(-\omega, -s) \neq g(\omega, s)$

2.1.3 Opérateur par blocs de quatre transformées de Radon généralisées obtenues par transformations unitaires

Dans cette section est introduite une transformation unitaire. Celle-ci permet de définir un opérateur par blocs dont chacun est une transformée de Radon généralisée d'une des deux composantes de f à support sur le disque D . Par la suite nous introduisons une décomposition paire-impair des fonctions. Cette transformation permet d'obtenir, sous certaines approximations, un système triangulaire par blocs.

Transformation unitaire

Soit la transformation unitaire (au facteur $\sqrt{2}$ près) suivante :

$$\begin{pmatrix} a(\omega, s) \\ m(\omega, s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g(\omega, s) \\ g(-\omega, -s) \end{pmatrix}$$

Cette transformation revient à sommer et soustraire deux mesures déphasées d'une demi-période de rotation de l'étoile. L'idée est d'exploiter la complémentarité et la redondance

1. La périodicité est en fait de 2π en imagerie nucléaire du fait de la fonction de pondération.

des deux mesures. En effet, pour un angle d'inclinaison nul, ces deux jeux de données sont équivalents : $g(\omega, s) = g(-\omega, -s)$. Si les axes de rotation et de visée sont à angle droit, ces mesures sont au contraire rigoureusement complémentaires : la sphère entière est alors mesurée. Cette transformation permet, comme en tomographie classique, d'une part de restreindre l'intervalle $\phi \in [0, 2\pi]$ à $\phi \in [0, \pi]$ et d'autre part de restreindre l'étude d'une fonction à support sur deux disques unitaires à celle de ses composantes $f = (f^+, f^-)^t$ à support sur le disque unitaire D . Résoudre le système précédent revient à résoudre :

$$\begin{pmatrix} a \\ m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ & A^- \\ M^+ & M^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f^+ \\ f^- \end{pmatrix}.$$

Nous notons G^\pm cet opérateur. Chacun des quatre opérateurs est une transformée de Radon généralisée invariante par rotation, (voir définition 4 dans le chapitre I). Notons μ^{A^+} , μ^{A^-} , μ^{M^+} , μ^{M^-} les mesures associées aux opérateurs respectifs A^+ , A^- , M^+ , M^- . S étant l'un quelconque de ces opérateurs, la mesure μ est définie par la transformée de Radon scalaire :

$$S : L^2(D) \longrightarrow L^2(S^1 \times [0, 1])$$

$$f \longmapsto g^S(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) \mu^s((x \cdot \omega) \omega + (x \cdot \omega^\perp) \omega^\perp) dx.$$

L'expression de chacune des fonctions poids est donnée en annexe 1.1. Ces fonctions sont continues et $C^\infty(D^2)$ par morceaux. Dans la suite on tirera parti de leurs propriétés de symétries suivantes :

par rapport à	μ^{A^+}	μ^{A^-}	μ^{M^+}	μ^{M^-}
• l'axe (o, ω)	symétrie	symétrie	antisymétrie	antisymétrie
• l'axe (o, ω^\perp)	symétrie	symétrie	symétrie	symétrie

Décomposition paire-impair

Soient F^p et F^i les ensembles de fonctions de $(L^2(D))^2$ de carré sommable respectivement paires et impaires au sens suivant :

$$F^p = \{f \in (L^2(D))^2, \forall x \in D \mid f^+(x) = f^-(x)\},$$

$$F^i = \{f \in (L^2(D))^2, \forall x \in D \mid f^+(x) = -f^-(x)\}.$$

Ainsi, une fonction de $(L^2(D))^2$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction de F^p et d'une fonction de F^i : $f = f^{\text{paire}} + f^{\text{impaire}}$. Par la suite, l'étude des fonctions paire =

$(f^p, f^p)^t$ et impaire $= (f^i, -f^i)^t$ de $(L^2(D))^2$ est restreinte à l'étude des fonctions f^p et f^i de $L^2(D)$. Résoudre l'équation précédente revient dès lors à chercher les composantes paire et impaire de la fonction définie par :

$$\begin{pmatrix} a \\ m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A^p & A^i \\ M^p & M^i \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f^p \\ f^i \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{bmatrix} A^p & A^i \\ M^p & M^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^+ & A^- \\ M^+ & M^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

On note $G^{p/i}$ ce système et μ^{A^p} , μ^{A^i} , μ^{M^p} , μ^{M^i} , les mesures associées aux opérateurs A^p , A^i , M^p , M^i . Ces opérateurs sont également des transformées de Radon généralisées invariantes par rotation. Dans le tableau ci-dessous sont résumées les propriétés de symétries des fonctions poids associées :

par rapport à	μ^{A^p}	μ^{A^i}	μ^{M^p}	μ^{M^i}
• l'axe(o, ω)	symétrie	symétrie	antisymétrie	antisymétrie
• l'axe(o, ω^\perp)	symétrie	symétrie	symétrie	symétrie

L'expression des quatre mesures est donnée en annexe 1.2.

Cette décomposition à l'avantage qu'elle permet d'obtenir, sous des hypothèses qui seront précisées dans les sections 2.2.2 et 2.2.3, un opérateur triangulaire par blocs. Ainsi l'analyse de l'injectivité s'en trouvera nettement facilitée. Dans la suite, nous nous intéressons en effet à l'unicité de la solution en imagerie Doppler et à la stabilité des reconstructions.

2.2 Unicité et stabilité des solutions

Dans cette section l'opérateur $G^{p/i}$ est étudié en tant que système d'équations de Volterra. Celles-ci sont obtenues par décomposition en harmoniques sphériques de la fonction cherchée. Dans un premier temps, la fonction poids est réduite aux indicatrices de l'hémisphère visible : χ^+ et χ^- . Cette approximation revient d'une part à attribuer une valeur particulière du coefficient d'assombrissement centre-bord ($\epsilon = 0$), d'autre part à considérer que le flux reçu est fonction de la norme du vecteur d'intensité et non de sa seule composante sur l'axe de visée. Cette approximation ne rend pas l'étude dépourvue

d'intérêts dans la mesure où l'inversibilité en imagerie Doppler dépend essentiellement de la géométrie un peu particulière induite par ces indicatrices. Cette approximation est à rapprocher de celle couramment faite en imagerie nucléaire selon laquelle la transformée de Radon classique est substituée à la transformée de Radon atténuée. Dans un second temps nous étudions l'injectivité sous des hypothèses moins fortes mais permettant également d'obtenir un système triangulaire. Des fonctions du noyau sont exhibées et l'instabilité de la reconstruction mise en évidence.

2.2.1 Équations de Volterra associées aux transformées de Radon généralisées invariantes par rotation

Une décomposition des fonctions en harmoniques sphériques permet d'obtenir, grâce à l'invariance par rotation (voir définition 4) des opérateurs de Fredholm donnant une expression de chaque coefficient de f en fonction des coefficients de même degré de g . Dans le cas particulier des propriétés de symétries des mesures, ces équations intégrales sont des opérateurs de Volterra de première espèce. Après quelques brefs rappels sur, principalement, l'existence et l'unicité des solutions des opérateurs de Volterra, nous établissons les équations de Volterra dans le cas des :

- fonctions poids symétriques par rapport aux deux variables : opérateurs A .
- fonctions poids antisymétriques par rapport à la variable d'intégration t , symétriques par rapport à la variable de shift s : opérateurs M .

Quelques rappels des équations de Volterra

C'est sans doute sous l'impulsion de la physique que se sont développées les théories inhérentes aux équations intégrales. Un très grand nombre de modèles physiques se formulent sous forme d'opérateurs de Fredholm c'est à dire d'équations intégrales du type :

$$g(y) = \int_a^b f(x) K(x, y) dx \quad : \text{Fredholm de première espèce,}$$

$$g(y) = f(y) - \lambda \int_a^b f(x) K(x, y) dx \quad : \text{Fredholm de seconde espèce.}$$

où x et y sont des réels. La théorie des équations de Fredholm peut être vue comme une extension de l'algèbre linéaire. Elle a contribué fortement au développement de l'analyse fonctionnelle. Une classe particulière des équations de Fredholm sont les équations de Volterra où le noyau³ $K(x, y)$ est nul $\forall x > y$. Celles-ci ont des propriétés particulièrement intéressantes qui sont naturellement à rapprocher des propriétés des matrices triangulaires.

3. Il est d'usage d'appeler noyau d'un opérateur, la fonction $K(x, y)$ de l'intégrale. Nous gardons le même terme pour désigner l'ensemble des fonctions dont l'image, par un opérateur donné, est nulle.

Intégrales de Volterra de seconde espèce

• *Définition* : une équation linéaire de seconde espèce de Volterra est une équation de la forme :

$$g(y) = f(y) - \int_0^y f(x) K(x, y) dx, \quad \forall y \in [0, Y], \quad (2.6)$$

où $g(y)$ représente les mesures et $f(y)$ la fonction cherchée. Nous notons T l'opérateur qui à f fait correspondre l'image $g + Kf$, K désignant l'opérateur intégral.

• *Existence et unicité* des solutions : une méthode très classique pour prouver l'existence et l'unicité de la solution est la méthode itérative de Picard [97]. Elle est basée sur l'étude de la suite $g(y) = f_n(y) - \int_0^y f_{n-1}(x) K(x, y) dy$, avec $f_0(y) = g(y)$.

Théorème 4 Soit $K(x, y)$ un noyau continu $\forall (x, y) \in [0, 1]^2$, $g(y)$ une fonction continue $\forall y \in [0, 1]$ alors l'équation (2.6) admet une solution continue unique, voir [97] p.30.

Preuve: soient G et K tels que $\forall y, |g(y)| \leq G$ et $\forall (x, y), |K(x, y)| \leq K$ et soit la suite $\phi_n(y) = f_n(y) - f_{n-1}(y)$ avec $\phi_0(y) = g(y)$. On montre par récurrence que $|\phi_n(y)| \leq G(Ky)^n/n!$. Ainsi, la suite $f_n = \sum_{i=0}^n \phi_i$ converge vers $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(y)$. Cette fonction est bien solution de l'équation (2.6). En effet, du fait de la convergence uniforme, l'ordre de sommation et d'intégration peut être interverti :

$$\begin{aligned} \int_0^y \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(x) K(x, y) dx &= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^y \phi_i(x) K(x, y) dx \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_{i+1}(y) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(y) - g(y) \end{aligned}$$

De manière similaire, on montre que s'il existe une autre solution \tilde{f} , alors elle vérifie, $\forall n \in \mathbb{N} : |\tilde{f}(y) - f(y)| \leq B(Ky)^n/n!$ et donc en définitif, $\tilde{f}(y) = f(y)$. \square

La convergence est bien la conséquence de la forme particulière de l'équation de Volterra. En effet le fait d'intégrer sur un triangle ($x \leq y$) et non sur un rectangle (équations de Fredholm), introduit la fonction factorielle. Or $a^n/n!$ est uniformément convergente. Par contre, l'unicité de la solution de l'équation de Fredholm n'est montrée que sous l'hypothèse supplémentaire : $K < 1$. En résumé, la méthode itérative de Picard revient à prouver que l'opérateur T est un opérateur contractant c'est à dire tel qu'il existe $\alpha < 1$ vérifiant : $\|Tf_1 - Tf_2\| \leq \alpha \|f_1 - f_2\|$. Avec la même approche, le théorème précédent peut être étendu à des classes plus larges de noyaux :

Théorème 5 Soit $g(y) \in L^2[0, Y]$ et soit le noyau $K(x, y)$ tel que

$$\int_0^Y \int_0^Y |K(x, y)|^2 dx dy < \infty.$$

alors l'équation (2.6) admet une unique solution dans $L^2[0, Y]$, voir [82] p.33.

Soulignons l'importance du choix de l'espace de travail puisqu'il détermine l'espace des solutions. Par exemple, la solution de l'équation : $f(y) - \int_0^y y^{y-x} f(x) dx = 0$ existe : $f(y) = cy^{y-1}$ mais n'est pas dans $L^2[0, 1]$.

Le théorème suivant, auquel nous aurons recours à plusieurs reprises, ne s'appuie pas sur des considérations d'opérateurs contractants. Son intérêt est qu'il permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution pour des classes de noyaux non couverts par les deux théorèmes précédents. La méthode s'appelle méthode de continuité parce que les propriétés sont établies sur une partition de l'intervalle $[0, Y]$.

Théorème 6 Si dans l'équation (2.6) :

- 1- $g(y)$ continue sur $[0, Y]$,
- 2- $\forall h \in C^0[0, Y]$ et $\forall (y_1, y_2) \in [0, Y]^2$,

$$\int_{y_1}^{y_2} K(x, y) h(x) dx \text{ et } \int_0^y K(x, y) h(x) dx$$

sont des fonctions continues de y ,

- 3- $\forall y \in [0, Y]$, $K(x, y)$ est absolument sommable par rapport à x .
- 4- Il existe une partition $[Y_i, Y_{i+1}]$, $i = 0..N$ de $[0, Y]$ telle que $\forall i = 0..N$, $\forall y \in [Y_i, Y_{i+1}]$,

$$\int_{Y_i}^{\min\{Y_{i+1}, y\}} |K(x, y)| dx \leq \alpha < 1,$$

- 5- $\forall y \in [0, Y]$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_y^{y+\delta} |K(x, y+\delta)| dx = 0,$$

alors cette équation admet une solution continue unique sur $[0, Y]$.

Preuve: considérons l'intervalle $[0, Y_1]$. Soient les suites f_n et ϕ_n définies précédemment dans la méthode itérative de Picard. De la quatrième hypothèse est déduit :

$$|\phi_n(y)| \leq \alpha \max_{0 \leq y \leq Y_1} |\phi_{n-1}(y)|$$

soit, en itérant à nouveau

$$\max_{0 \leq y \leq Y_1} |\phi_n(y)| \leq \alpha^n \max_{0 \leq y \leq Y_1} |g(y)| \text{ car } \phi_0(y) = g(y).$$

Ainsi la suite $f_n(x) = \sum_{i=0}^n \phi_i(y)$ est majorée par

$$\max_{0 \leq y \leq Y_1} |g(y)| \sum_{i=0}^n \alpha^i < \max_{0 \leq y \leq Y_1} |g(y)| \frac{1}{1-\alpha}$$

et donc converge uniformément. De même on montre que s'il existe une autre solution \tilde{f} alors elle vérifie :

$$\max_{0 \leq y \leq Y_1} |\tilde{f}(y) - f(y)| \leq \alpha \max_{0 \leq y \leq Y_1} |\tilde{f}(y) - f(y)|$$

et comme $\alpha < 1$, ceci entraîne que $\tilde{f}(y) = f(y)$. La même démarche est suivie pour chaque intervalle $[Y_n, Y_{n+1}]$. L'hypothèse 5- du théorème assure la continuité de la solution sur l'intervalle entier $[0, Y]$. \square

De ce théorème se déduit en particulier l'unicité de la solution de l'équation (2.6) pour $K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y-x}}$, voir [97]p.34.

Intégrales de Volterra de première espèce

• *Définition* : l'équation de Volterra de première espèce est une équation intégrale du type

$$g(y) = \int_0^y f(x) K(x, y) dy, \quad \forall y \in [0, Y]. \quad (2.7)$$

L'injectivité n'est pas aussi évidente à montrer que pour les équations de seconde espèce. Cependant, pour des noyaux suffisamment réguliers, il est possible d'obtenir une équation de seconde espèce par dérivation par rapport à y ou par intégration par parties. Pour des noyaux non bornés en $x = y$ dont celui de l'équation d'Abel $\frac{1}{(y-x)^\nu}$, $0 < \nu < 1$ est l'exemple type, une toute autre démarche s'impose.

• *Existence et unicité des solutions* : après dérivation par rapport à y , l'équation (2.7) devient, pour K et f suffisamment différentiables :

$$\frac{d}{dy} g(y) = K(y, y) f(y) + \int_0^y f(x) \frac{\partial}{\partial y} K(x, y) dx.$$

Ainsi si $\forall y \in [0, Y]$, $K(y, y) \neq 0$ et $\frac{\partial}{\partial y} K(x, y) / K(y, y) \in L^2([0, Y]^2)$, l'équation admet une unique solution de carré sommable. Si l'équation de seconde espèce est obtenue suite à une intégration par parties, alors il faudra que $\frac{\partial}{\partial x} K(x, y) / K(y, y) \in L^2([0, Y]^2)$

Théorème 7 Soit l'équation (2.7) telle que :

- 1- $K(x, y)$ et $\partial K(x, y) / \partial y$ sont continues $\forall (x, y) \in [0, Y]^2$,

- 2- $\forall y \in [0, Y], K(y, y) \neq 0,$
- 3- $g(0) = 0$
- 4- $\forall y \in [0, Y], g(y)$ et $dg(y)/dy$ sont continues,

alors (2.7) admet une solution continue unique .

Sous la condition $g(0) = 0$, la solution de l'équation de seconde espèce, obtenue après dérivation, vérifie bien l'équation de première espèce.

Une autre méthode consisterait à intégrer par parties. Les conditions requises seront alors un peu différentes.

Intégrales d'Abel

L'opérateur d'Abel est un cas particulier de l'opérateur de Volterra de première espèce pour lequel le noyau n'est pas de carré sommable.

• Définition : l'équation est de type Abel généralisée ([97]p.75, [82]p.41, [70]p.158) si elle s'écrit sous la forme :

$$g(y) = \int_0^y \frac{K(x, y)}{(y-x)^\nu} f(x) dx, \text{ avec } \nu < 1,$$

avec $\forall (x, y) \in [0, Y]^2, K(x, y)$ continue.

La transformée d'Abel décrit la projection en dimension 2, d'un signal à symétrie circulaire. C'est pourquoi un tel système est appelé réponse en ligne et est noté $L(x)$. En effet, soit $f(r)$ une source émettant isotropiquement, alors

$$\begin{aligned} L(x) &= f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) * \delta(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) dy \\ &= 2 \int_x^\infty \frac{f(r) r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr. \end{aligned}$$

Les phénomènes physiques susceptibles d'être modélisés ainsi sont nombreux : mesure de radiation d'un objet cylindrique, stéréologie [97] p.23, réponse à un signal électrique d'une caméra de télévision [28] p.262...

• Existence et unicité des solutions : la démarche consiste à obtenir une équation de première espèce avec un noyau plus régulier.

Théorème 8 Soit $K(x, y)$ continue $\forall (x, y) \in [0, Y]^2$ et $g(y)$ continue $\forall y \in [0, Y]$ et telle que $\exists \gamma, \lim_{y \rightarrow 0} y^\gamma g(y) = C$, avec $C \neq 0$ et $\gamma < \nu$, alors toute solution dans la classe des fonctions $y^\beta F(y)$ avec $\beta > -1$ et $F(y)$ continue, satisfait l'équation :

$$\int_0^z \frac{g(y)}{(z-y)^{1-\nu}} dy = \int_0^z f(x) H(x, z) dx, \quad \text{où}$$

$$H(x, z) = \int_0^1 \frac{K(x, x + (z - x)u)}{u^\nu (1 - u)^{1-\nu}} du.$$

Le noyau H hérite des propriétés du noyau K . Ainsi, si $K(y, y)$ est non nul $\forall y \in [0, Y]$ il en sera de même de H . Par ailleurs, si K est continue (resp. différentiable), alors H est continue (resp. différentiable). Ainsi, si K vérifie ces trois dernières propriétés, une équation de Volterra de seconde espèce peut être obtenue par dérivation de la nouvelle équation de première espèce. L'unicité de la solution en est déduite.

Des méthodes numériques pour la résolution des équations de Volterra sont exposées dans [97] et [28]. Nous y reviendrons au chapitre suivant.

Cas des fonctions poids antisymétriques par rapport à la variable d'intégration t et symétriques par rapport à la variable de shift, s

Notons $\mu(s, t)$ l'une quelconque des fonctions poids associées aux opérateurs M avec $s = x \cdot \omega$ et $t = x \cdot \omega^\perp$. L'opérateur ici considéré est :

$$\begin{aligned} M : L^2(D) &\longrightarrow L^2(S^1 \times [0, 1]) \\ f &\longmapsto g^M(\omega, s) = \int_{x \cdot \omega = s} f(x) \mu(x \cdot \omega, x \cdot \omega^\perp) dx, \end{aligned}$$

dans le cas particulier de la mesure telle que : $\mu(-s, t) = \mu(s, t) = -\mu(s, -t)$.

Soulignons que l'inversibilité dans le cas d'invariance par rotation a été montrée par T. Quinto [112, 113] pour des fonctions poids de classe C^∞ . En dimension 2, l'inversibilité a été montrée sous des hypothèses de parité et de régularité. Ces hypothèses faites proviennent de la remarque suivante : en partant de la définition 4 d'invariance par rotation, il découle que pour toute rotation $k \in \mathcal{O}(n)$ et $\forall x_0 \in H(\omega, s) = \{x \in \mathbb{R}^n | x \cdot \omega = s\}$, la mesure est telle que : $\mu(x_0, \omega, s) = \mu(k^{-1}x_0, k^{-1}\omega, s)$ [112] p.512. Il s'ensuit que, en dimension $n > 2$, pour toute rotation k qui laisse ω inchangé $\mu(x, \omega, s) = \mu(\|x - s\omega\|, \omega, s)$, la mesure est radiale par rapport à la première coordonnée dans l'hyperplan $H(\omega, s)$. Quinto démontre alors l'inversibilité pour une fonction poids de la forme : $\mu(\|x - s\omega\|, s)$.

En dimension 2, il n'existe pas de rotation k qui laisse inchangé ω : une transformation peut alors être invariante par rotation sans que la mesure μ associée n'ait les propriétés de symétrie citées dans [112]. En résumé, le théorème de T. Quinto est applicable en dimension 2 pour des fonctions poids régulières et symétriques par rapport aux deux variables. Il ne peut donc pas être directement utilisé dans notre cas. Toutefois, nous ne faisons que reprendre la démarche de Cormack [38] et Quinto [112, 113] en l'adaptant à notre étude de l'unicité.

La fonction f est décomposée en harmoniques sphériques. En dimension 2 cela revient à une décomposition en série de Fourier par rapport à la variable angulaire lorsque la

fonction est donnée en coordonnées polaires :

$$\forall f \in L^2(D), f(r\theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(r) e^{il\psi}, \theta = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}$$

avec

$$f_l(r) = \int_{S^1} f(r\theta) e^{-il\psi} d\psi, l \in \mathbb{Z}$$

Rappelons que $H(\omega, s) = \{x \in D, x \cdot \omega = s\}$ est l'hyperplan (ici une droite) sur lequel est intégrée la fonction, pondérée par μ ; alors $x_H \in H$ s'écrit aussi :

$$\begin{aligned} x_H &= s\omega + s \tan(\psi - \phi) \omega^\perp \quad \text{d'où} \\ \|x_H\| &= \frac{s}{\cos(\psi - \phi)} \quad \text{et} \\ dx_H &= \frac{s}{\cos^2(\psi - \phi)} d\psi \omega^\perp. \end{aligned}$$

L'image de $f_l(r) e^{il\psi}$ par l'opérateur M est alors :

$$g^M(\omega, s) = \int_{-\pi/2+\phi}^{\pi/2+\phi} f_l\left(\frac{s}{\cos(\psi - \phi)}\right) \mu(s, s \tan(\psi - \phi)) \frac{s}{\cos^2(\psi - \phi)} e^{il\psi} d\psi.$$

Après changement de variable de $\psi - \phi$ en ψ l'équation devient :

$$g^M(\omega, s) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f_l\left(\frac{s}{\cos \psi}\right) \mu(s, s \tan \psi) \frac{s}{\cos^2 \psi} e^{il\psi} d\psi e^{il\phi}.$$

La fonction $\mu(s, t)$ étant antisymétrique par rapport à la seconde variable il s'ensuit que pour $l = 0$, l'équation précédente s'annule : les fonctions radiales appartiennent au noyau de l'opérateur M . Notons $F_r = \{f \in L^2(D) \mid f(x) = \tilde{f}(\|x\|)\}$ leur ensemble. Pour $l \neq 0$ l'équation se réduit à :

$$g^M(\omega, s) = 2i \int_0^{\pi/2} f_l\left(\frac{s}{\cos \psi}\right) \mu(s, s \tan \psi) \frac{s}{\cos^2 \psi} \sin(l\psi) d\psi e^{il\phi}.$$

Après changement de $\cos \psi$ en t :

$$g^M(\omega, s) = -2i \int_1^0 f_l\left(\frac{s}{t}\right) \mu\left(s, s \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right) \frac{s}{t^2} \operatorname{sgn}(l) U_{|l|-1}(t) dt e^{il\phi}, l \in \mathbb{Z}.$$

où U_l est le polynôme de Tchebitchev de seconde espèce de degré l :

$$U_l(x) = \frac{\sin((l+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)}.$$

Enfin, en posant $r = s/t$, f_l étant à support sur D , il s'ensuit :

$$g^M(\omega, s) = 2i \int_s^1 f_l(r) \mu\left(s, \sqrt{r^2 - s^2}\right) \operatorname{sgn}(l) U_{|l|-1}\left(\frac{s}{r}\right) dr e^{il\phi}.$$

Soient $g_l^M(s)$ les coefficients complexes de Fourier de $g^M(\omega, s)$ par rapport à la variable angulaire, le problème étudié est alors celui de l'identifiabilité des coefficients $f_l(s)$ donnés par l'équation de Volterra de première espèce :

$$g_l^M(s) = 2i \int_s^1 f_l(r) \mu(s, \sqrt{r^2 - s^2}) \operatorname{sgn}(l) U_{|l|-1}\left(\frac{s}{r}\right) dr.$$

L'expression suivante obtenue en posant $x = 1 - r^2$ et $y = 1 - s^2$ est plus classique et mieux appropriée à l'étude des singularités à l'origine :

$$g_l^M(\sqrt{1-y}) = i \operatorname{sgn}(l) \int_0^y f_l(\sqrt{1-x}) \frac{\mu(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x})}{\sqrt{1-x}} U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right) dx. \quad (2.8)$$

Par la suite, cet opérateur est étudié pour chacune des fonctions poids. Une équation de Volterra de seconde espèce est déduite par dérivation par rapport à la variable y , sous la condition que $\mu(\sqrt{1-y}, 0)$ ne s'annule pas.

Cas des fonctions poids symétriques par rapport aux deux variables

L'équation de Volterra est maintenant donnée dans le cas des fonctions de pondération symétriques par rapport aux deux variables c'est à dire pour les poids associés aux opérateurs A . Celle-ci a été établie par Quinto [112, 113](3.8) en dimension quelconque. Comme précédemment, la fonction poids est notée $\mu(s, t)$. Pour tout entier l , l'équation de Volterra associée est alors :

$$g_l^A(1/s) = 2 \int_1^s f_l(1/r) \mu\left(\frac{1}{s}, \sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}}\right) T_{|l|}(r/s) \frac{1/r^3}{\sqrt{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{s^2}}} dr$$

soit,

$$g_l^A(s) = 2 \int_s^1 f_l(r) \mu(s, \sqrt{r^2 - s^2}) T_{|l|}(s/r) \frac{r}{\sqrt{r^2 - s^2}} dr,$$

où $T_{|l|}$ est le polynôme de Tchebitchev de première espèce de degré $|l|$:

$$T_{|l|}(x) = \cos(l \arccos(x)), l \in \mathbb{N}.$$

Cette équation s'écrit de manière plus classique sous la forme :

$$g_l^A(\sqrt{1-y}) = \int_0^y f_l(\sqrt{1-x}) \frac{\mu(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x})}{\sqrt{y-x}} T_{|l|}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right) dy \quad (2.9)$$

Pour les fonctions poids ne s'annulant pas en $x = y$, cette équation est de type intégrale d'Abel généralisée. En particulier pour les fonctions poids μ constantes, Cormack [38](18) donne l'expression analytique de la fonction cherchée :

$$f_l(r) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 g_l^A(s) T_{|l|}(s/r) \frac{r}{s\sqrt{s^2 - r^2}} ds.$$

Notons également que, la transformation de Hankel étant équivalente à une transformée d'Abel suivie d'une transformation de Fourier [28] p.274, d'un point de vue pratique, la première harmonique pourra être obtenue par :

$$\begin{aligned} f_0(r) &= \int_0^1 J_0(2\pi r\sigma) \sigma \int_0^1 g_0^A(s) e^{2i\pi\sigma s} ds d\sigma \text{ avec} \\ J_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \beta} d\beta \text{ fonction de Bessel.} \end{aligned}$$

Dans le chapitre suivant, nous reviendrons sur la résolution de cette équation. Les équations de Volterra associées aux quatre opérateurs étant maintenant posées, nous en étudions l'injectivité. Comme le suggèrent les quelques rappels donnés dans la section 2.2.1, les équations de Volterra ont fait l'objet de nombreuses études. Ainsi, en exprimant le problème d'imagerie Doppler dans le cadre des équations de Volterra, nous bénéficions de l'apport de tous les résultats établis.

2.2.2 Inversibilité dans le cas des fonctions poids réduites aux indicatrices de l'hémisphère visible

En s'intéressant uniquement à la géométrie, le problème d'imagerie Doppler est étudié par le biais de l'opérateur $G^{p/i}$. Pour cela, la fonction μ est restreinte à l'indicatrice de la région visible sur chacun des deux disques :

$$\mu^+(s\omega + t\omega^\perp) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq -c\sqrt{1-s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}, \quad \mu^-(s\omega + t\omega^\perp) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq c\sqrt{1-s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un développement semblable à celui mené en annexe 1 conduit à l'expression suivante des mesures :

$$\begin{aligned} \mu^{Ap}(s, t) &= 2 & \mu^{Ai}(s, t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq c\sqrt{1-s^2} \\ 2 & \text{sinon} \end{cases} \\ \mu^{Mp}(s, t) &= \begin{cases} 2\text{sgn}(t) & \text{si } |t| \geq c\sqrt{1-s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} & \mu^{Mi}(s, t) &= 0 \end{aligned}$$

• $c \neq \{0, 1\}$, inclinaisons intermédiaires

L'opérateur A^p est une transformée de Radon classique dont on connaît, par conséquent, l'inverse. Le système est triangulaire par blocs. Ainsi seuls les opérateurs A^i et M^p interviennent dans l'étude de l'inversibilité de $G^{p/i}$.

Opérateur M^p

De l'équation de Volterra (2.8), qui a été établie pour les fonctions poids antisymétriques par rapport à la variable d'intégration, nous obtenons, $\forall l \in \mathbb{Z}^*$, $\forall y \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} g_l^{M^p}(\sqrt{1-y}) &= 2i \operatorname{sgn}(l) \int_0^{(1-c^2)y} \frac{f_l^p(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} U_{|l|-1} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) dx, \\ &= 2i (1-c^2) \operatorname{sgn}(l) \int_0^y \frac{f_l^p(\sqrt{1-(1-c^2)x})}{\sqrt{1-(1-c^2)x}} U_{|l|-1} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Comme la variable x varie entre $0 \leq x \leq 1$, il s'ensuit que $c \leq 1 - (1-c^2)x \leq 1$. De ce fait, les fonctions dont le support est inclus dans le disque de rayon c ne sont pas mesurées. Cet espace de fonctions est noté: $F_c = \{f \in L^2(D) \mid \forall x \in D, \|x\| > c \Rightarrow f(x) = 0\}$. Le noyau de M^p contient donc l'ensemble F_c . Notons $dU_l(x)$ la dérivée première de $U_l(x)$. Elle est donnée par la relation [2]: $(1-x^2) dU_l(x) = -lxU_l(x) + (l+1)U_{l-1}(x)$. Après dérivation par rapport à y l'équation de Volterra de seconde espèce suivante est obtenue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} g_l^{M^p}(\sqrt{1-y}) &= 2i (1-c^2) \operatorname{sgn}(l) \left(\frac{f_l^p(\sqrt{1-(1-c^2)y})}{\sqrt{1-(1-c^2)y}} U_{|l|-1} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)y}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^y \frac{f_l^p(\sqrt{1-(1-c^2)x})}{\sqrt{1-(1-c^2)x}} \frac{dU_{|l|-1} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}} \right)}{\sqrt{1-y}\sqrt{1-(1-c^2)x}} dx \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Pour les valeurs de y n'annulant pas le polynôme de Tchebitchev U_{l-1} et pour $y \neq 1$, le noyau est de carré sommable ($c < 1$). En effet, chaque terme de l'intégrale, excepté celui en $\sqrt{1-y}$, est borné:

$$c \leq 1 - (1-c^2)x \leq 1,$$

$$|U_l(x)| \leq l+1,$$

$$|dU_l(x)| \leq dU_l(1) = \frac{l^3}{3} + l^2 + \frac{2l}{3}.$$

Ainsi, pour y inférieur à la première valeur annulant le polynôme, il est possible d'obtenir une équation de seconde espèce avec un noyau de carré sommable en divisant les

deux membres de l'équation (2.11) par $2i(1-c^2) \operatorname{sgn}(l) \frac{U_{|l|-1} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)y}} \right)}{\sqrt{1-(1-c^2)y}}$. L'unicité de la solution dans l'espace des fonctions de carré sommable est alors déduite du théorème 5. L'injectivité aux voisinages des l racines de U_l est montrée en annexe 2.1. L'unicité est ensuite déduite en itérant à nouveau cette approche entre chaque singularité.

En conclusion, dans $L^2(D)$, seules les fonctions radiales ($l = 0$) et celles dont le support est inclus dans le disque de rayon c appartiennent au noyau : $\operatorname{Ker}(M^p) = F_c \cup F_r$.

Remarques : la solution analytique pour les deux premières harmoniques est facilement calculée :

- $|l| = 1$: la dérivée première de $U_0(x)$ s'annulant, la solution est directement déduite de l'équation (2.11),

$$\forall r \in [c..1], f_{\pm 1}^p(r) = \frac{\pm i}{\sqrt{1-c^2}} \frac{r}{\sqrt{r^2-c^2}} dg_{\pm 1}^{Mp} \left(\sqrt{\frac{r^2-c^2}{1-c^2}} \right),$$

où $dg_{\pm 1}^{Mp}(x)$ est la dérivée première de $g_{\pm 1}^{Mp}(x)$.

- $|l| = 2$: en remarquant que $U_1(x) = 2x$, il en découle que le noyau de l'équation de première espèce (2.10) s'écrit comme un produit d'une fonction $X(x)$ de la variable x par une fonction $Y(y)$ de la variable y :

$$X(x) = \frac{4i(1-c^2) \operatorname{sgn}(l)}{1-(1-c^2)x}, \quad Y(y) = \sqrt{1-y}.$$

Le noyau est alors dit dégénéré. Après séparation des variables, les deux membres de l'égalité (2.10) sont divisés par $Y(y)$ pour $y \neq 1$. La solution suivante est alors facilement obtenue par dérivation par rapport à y :

$$\forall r \in [c..1], f_{\pm 2}^p(r) = \pm ir^2 \left(\sqrt{1-c^2} \frac{g_{\pm 2}^{Mp} \left(\sqrt{\frac{r^2-c^2}{1-c^2}} \right)}{(r^2-c^2)^{3/2}} - \frac{dg_{\pm 2}^{Mp} \left(\sqrt{\frac{r^2-c^2}{1-c^2}} \right)}{r^2-c^2} \right).$$

Opérateur A^i

L'expression de A^i est déduite de l'équation de Volterra (2.9) :

$$g_l^{A^i}(\sqrt{1-y}) = \int_{(1-c^2)y}^y \frac{f_l^i(\sqrt{1-x})}{\sqrt{y-x}} T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) dx.$$

Comme pour toute équation d'Abel généralisée, une équation de Volterra de première espèce avec un noyau plus régulier peut être obtenue après transformation par un opérateur

d'Abel (voir section 2.2.1). Comme pour obtenir l'inversion de la transformée de Radon classique [38] (et donc l'expression de f_l^i dans le cas $c = 1$), les deux membres sont multipliés par $T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{(1-z)\sqrt{z-y}}} \right) \frac{\sqrt{1-z}}{1-y}$ puis intégrés par rapport à y entre 0 et z . Le fait que le noyau soit intégré, à y fixé, entre les points $x = (1 - c^2)y$ et $x = y$, amène à distinguer, lors de l'inversion de l'ordre d'intégration, les deux cas $x \leq (1 - c^2)z$ et $x > (1 - c^2)z$, (voir Fig. 2.2).

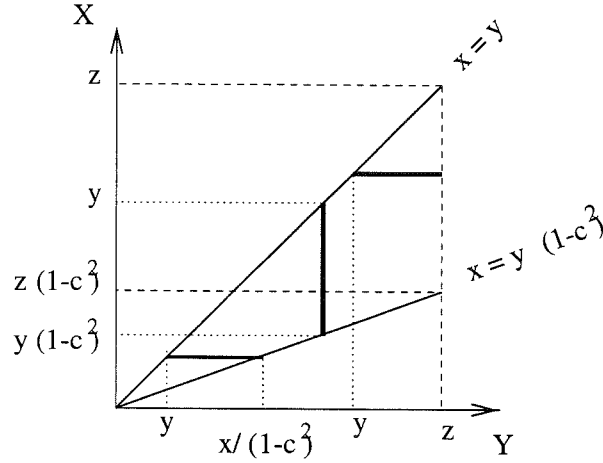


FIG. 2.2 – *Changement de l'ordre d'intégration de l'équation de Volterra. Dans le cas particulier où le noyau $K(x, y)$, avec $(x, y) \in [0, z]^2$, est intégré entre les droites $x = y(1 - c^2)$ et $x = y$, après changement de l'ordre d'intégration, deux cas sont à distinguer selon que $x \leq (1 - c^2)z$ ou $x > (1 - c^2)z$.*

$$\text{Posons } K_l^{A^i}(x, y, z) = T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-z}} \right) \frac{\sqrt{1-z}}{1-y}, \quad (2.12)$$

l'équation est alors équivalente à :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_l^{A^i}(z) &= \int_0^{(1-c^2)z} f_l^i(\sqrt{1-x}) \int_x^{x/(1-c^2)} \frac{K_l^{A^i}(x, y, z)}{\sqrt{y-x}\sqrt{z-y}} dy dx \\ &+ \int_{(1-c^2)z}^z f_l^i(\sqrt{1-x}) \int_x^z \frac{K_l^{A^i}(x, y, z)}{\sqrt{y-x}\sqrt{z-y}} dy dx \end{aligned}$$

avec

$$\tilde{g}_l^{A^i}(z) = \int_0^z g_l^{A^i}(z) \frac{T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-z}} \right) \sqrt{1-z}}{\sqrt{z-y} (1-y)} dy.$$

En remarquant que d'après [38](15), $\forall l \in \mathbb{Z}$

$$\int_x^z \frac{K_l^{A^i}(x, y, z)}{\sqrt{y-x}\sqrt{z-y}} dy = \int_x^z \frac{T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-z}} \right) T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) \sqrt{1-z}}{\sqrt{z-y} \sqrt{y-x} (1-y)} dy$$

$$= \pi \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (2.13)$$

l'équation devient :

$$\tilde{g}_l^{A^i}(z) = \int_0^{(1-c^2)z} f_l^i(\sqrt{1-x}) H_l^{A^i}(x, z) dx + \pi \int_{(1-c^2)z}^z \frac{f_l^i(\sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x}} dx. \quad (2.14)$$

Après changement de la variable y en $x + (z-x)u$, l'expression suivante du noyau $H_l^{A^i}(x, z)$ est déduite :

$$H_l^{A^i}(x, z) = \int_0^{\frac{c^2}{1-c^2} \frac{x}{z-x}} \frac{K_l^{A^i}(x, x + (z-x)u, z)}{\sqrt{u(1-u)}} du.$$

Montrons que cette fonction est bornée sauf en $(x, z) = (1, 1)$. Le noyau $K_l^{A^i}(x, y, z)$, (voir (2.12)), est borné sauf en $x = 1, y = 1, z = 1$. Or, d'après la définition de $H_l^{A^i}(x, z)$, cette valeur n'est prise que pour $z = 1$. En effet, $y = x + (z-x)u$ est maximale pour $u = \frac{c^2}{1-c^2} \frac{x}{z-x}$ et vaut alors $y = \frac{x}{1-c^2}$. Par ailleurs, $H_l^{A^i}(x, z)$ est intégré par rapport à x pour $0 \leq x \leq (1-c^2)z$, et donc d'une part x n'atteint jamais la valeur 1 pour $c \neq 0$, d'autre part quand $x = (1-c^2)z$, alors $y = \frac{x}{1-c^2} = z$ n'atteint la valeur 1 que lorsque $z = 1$.

L'évaluation du noyau en la borne supérieure de l'intégrale, $x = z(1-c^2)$, donne d'après (2.13) avec changement de la variable y en $x + (z-x)u$:

$$H_l^{A^i}(z(1-c^2), z) = \int_0^1 \frac{K_l^{A^i}(x, x + (z-x)u, z)}{\sqrt{u(1-u)}} du = \pi \frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

Ceci peut aussi être déduit de la continuité du noyau.

Vérifions la dérivabilité de $H_l^{A^i}(x, z)$ par rapport à la variable z . Rappelons que la dérivée première de $T_{|l|}(x)$ est $DT_{|l|}(x) = lU_{l-1}(x)$. Ainsi, pour $x \neq 1, y \neq 1$ et $z \neq 1$, le noyau $K_l^{A^i}(x, y, z)$ est continu et différentiable par rapport à z et sa dérivée partielle est bornée. Comme précédemment, $\frac{\partial}{\partial z} K_l^{A^i}(x, y, z)$ n'est jamais évalué en $x = 1$ et y ne prend la valeur de 1 que pour $z = 1$. Il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) = c \frac{\sqrt{x}}{z-x} \frac{K_l^{A^i}(x, x/(1-c^2), z)}{\sqrt{(1-c^2)z-x}} + \int_0^{\frac{c^2}{1-c^2} \frac{x}{z-x}} \frac{\frac{\partial}{\partial z} K_l^{A^i}(x, x + (z-x)u, z)}{\sqrt{u(1-u)}} du$$

est intégrable pour $0 < x < (1-c^2)z$. Pour $z \neq 1$, ce noyau est donc de la forme $\frac{\tilde{H}_l^{A^i}(x, z)}{\sqrt{(1-c^2)z-x}}$, avec $\tilde{H}_l^{A^i}(x, z)$ borné. Ainsi, après dérivation par rapport à la variable z l'équation (2.14) devient :

$$D\tilde{g}_l^{A^i}(z) = \pi \frac{f_l^i(\sqrt{1-z})}{\sqrt{1-z}} + \int_0^{(1-c^2)z} f_l^i(\sqrt{1-x}) \frac{\tilde{H}_l^{A^i}(x, z)}{\sqrt{(1-c^2)z-x}} dx.$$

D'après le théorème 6, cette équation admet une solution unique dans l'espace des fonctions $C^0(D) : Ker(A^i) = \{0\}$.

Ainsi, pour $c \neq \{0, 1\}$, nous venons d'étudier individuellement chaque opérateur d'un système étant triangulaire par blocs. Les opérateurs A^i et A^p sont injectifs tandis que le noyau de M^p est formé de l'ensemble des fonctions $F_c \cup F_r$. Le noyau est facilement déduit; $(f^p, f^i)^t$ appartient au noyau si et seulement si:

$$\begin{cases} A^p f^p + A^i f^i = 0 \\ M^p f^p = 0 \end{cases}$$

c'est à dire, si et seulement si $f^p \in Ker(M^p)$ et $f^i = -A^i A^p f^p$, ce qui est équivalent à $f \in \mathcal{F}_r \cup \mathcal{F}_c$ où les deux ensembles sont définis par:

$$\mathcal{F}_r = \{f \in F_r^2 \mid f^i = -A^{i-1} A^p f^p\},$$

$$\mathcal{F}_c = \{f \in F_c^2 \mid f^i = -f^p\}.$$

Sous les approximations énoncées, le noyau de l'opérateur d'imagerie Doppler est donc formé des deux ensembles suivant :

- **un ensemble des fonctions radiales.** En effet, si $f^p \in F_r \subset Ker(M^p)$, alors $f^i = -A^{i-1} A^p f^p$ appartient au noyau de $G^{p/i}$. Par ailleurs, f^i ainsi définie est radiale dans la mesure où si $f^p \in F_r$ alors $A^p f^p$ ne dépend pas de la phase. Or seules des fonctions radiales peuvent être issues de mesures radiales. Nous caractériserons plus précisément ces fonctions dans le chapitre suivant section 3.3.1.
- l'ensemble des fonctions dont le support est inclus dans le disque de rayon c . En effet, $\forall f^p \in F_c \subset Ker(M^p)$, les mesures $g^{A^p}(\omega, s) = A^p f^p(\omega, s)$ seront nulles pour $|s| > c$. Par ailleurs, résoudre $g^{A^p} = -A^i f^i$ avec $g^{A^p} = 0$ si $s > c$ implique que f^i appartient à F_c et l'opérateur A^i réduit à cet espace de fonction est un opérateur de Radon classique. En résumé, sur l'espace des fonctions réduit à F_c , $A^p \equiv A^i$ sont des transformées de Radon classiques, d'où l'ensemble \mathcal{F}_c . Cet ensemble désigne les **fonctions de la sphère dont le support est inclus dans la partie jamais visible de l'étoile** ($f^+ = f^p + f^i = 0$).

• $c = 0$, inclinaison perpendiculaire

Les axes de rotation et de visée sont perpendiculaires. Tout point de la sphère est visible durant une demi-période de rotation de l'étoile. Les opérateurs A^i et M^i sont nuls :

la partie impaire ne peut être reconstruite. Comme A^p est une transformée de Radon classique, nous en déduisons que seul l'ensemble des fonctions antisymétriques peut être reconstruit. Cette dégénérescence est connue sous le nom d'ambiguïté nord-sud [92, 138].

• $c = 1$, inclinaison nulle

C'est le cas d'inclinaison nulle de l'axe de l'étoile sur l'axe de visée. L'observateur n'a accès qu'aux mesures sur une demi-sphère. Les opérateurs M^p et M^i sont nuls et $A^p \equiv A^i$ sont des transformées de Radon classiques si la fonction d'assombrissement centre-bord est négligée⁴. Ainsi seul l'ensemble des fonctions telles que $f^p = -f^i$ ne peut pas être estimé. Cet espace est en fait \mathcal{F}_c pour $c = 1$ c'est à dire l'ensemble des fonctions dont le support est inclus dans l'hémisphère sud ($f^+ = f^p + f^i = 0$).

Conclusions sur l'opérateur $G^{p/i}$

En résumé, nous venons de montrer que, sur un modèle simplifié ne prenant en compte que l'aspect géométrique, l'opérateur n'est pas injectif : outre les fonctions à support dans la partie non visible et le cas d'ambiguïté nord-sud, un ensemble de fonctions radiales ne pourra être reconstruit. Il faut ici remarquer que la dimension du noyau est la même dans les deux cas extrêmes d'inclinaison. Soulignons également que les fonctions radiales du noyau constituent un ensemble de même dimension que celui des fonctions radiales (donc d'harmoniques nulles en dehors de la première) paires (et donc de petite dimension). Ainsi la dimension du noyau est maximale pour les deux cas extrêmes de l'angle d'inclinaison.

Par ailleurs, l'opérateur A^i étant une équation d'Abel généralisée, l'identification des coefficients de f^i est un problème mal posé même sur l'espace de fonction restreint à l'orthogonal du noyau. En effet, les solutions font intervenir la dérivée des mesures [97] et par conséquent une régularisation s'impose. Celle-ci est étudiée ultérieurement.

2.2.3 Inversibilité : cas général avec approximations

Dans cette section, l'opérateur $G^{p/i}$ est étudié pour une valeur quelconque de l'assombrissement centre-bord. Afin d'obtenir un système triangulaire dont on puisse déduire l'indépendance des blocs, des approximations sont introduites. Ensuite, les trois blocs sont étudiés indépendamment.

4. L'hémisphère nord, seul visible, se projette sur un unique disque : l'indicatrice d'ellipse n'apparaît plus et la projection sur l'axe de visé est "compensée" par le jacobien qui entre en jeu.

Approximations

Le système précédemment étudié était triangulaire :

- d'une part du fait que, pour un point de l'hémisphère nord appartenant à la région visible, la valeur prise en ce point par la fonction de pondération était la même pour des observations déphasées d'une demi-période. Ainsi, la fonction poids de l'opérateur obtenu en soustrayant les transformées de Radon : $g(\omega, s) - g(-\omega, -s)$ est nulle à l'intérieur de l'ellipse \mathcal{E} : la fonction n'est pas mesurée par les opérateurs M dans l'ellipse.
- d'autre part parce que dans la région non toujours visible (\mathcal{E}^c), le poids affecté en un point et son symétrique par rapport à l'équateur était le même. Ainsi, $\forall f \in F^i$, la fonction poids associées aux opérateurs A^i et M^i est nulle dans la partie complémentaire de l'ellipse, \mathcal{E}^c : les fonctions impaires ne sont pas mesurées par les opérateurs impairs dans l'ellipse complémentaire.

Il en découle que l'opérateur M^i était nul. Dans la suite où la fonction d'assombrissement centre-bord est prise en compte, nous faisons l'approximation que cet opérateur reste nul. Cela revient à considérer :

- d'une part qu'entre les phases ϕ et $\phi + \pi$, la composante projetée du vecteur intensité, pour les points visibles à ϕ et $\phi + \pi$ (et donc proche du pôle) est la même, ce qui est d'autant plus vrai qu'on s'approche du pôle, voir Fig. 2.3. Plus précisément, ceci concerne les points du disque de rayon c qui sur la sphère sont les points dont la latitude est supérieure à l'angle d'inclinaison α . L'erreur faite est $\delta z_{o_3} = 2 \sin \alpha \cos \theta_r \cos \psi_r$.
- d'autre part, que pour les points de la région non toujours visible (donc proches de l'équateur), la coordonnée selon l'axe X_{o_3} est la même pour un point et son symétrique par rapport à l'équateur, ce qui là aussi est d'autant plus vrai qu'on s'approchera de l'équateur. L'erreur est alors de $\delta z_{o_3} = 2 \cos \alpha \sin \theta_r$.

L'expression des mesures est alors :

$$\mu^{A^p}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x}) = 2 \begin{cases} (1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x} + \\ \epsilon (c^2 x + (1-c^2)(y-x)) & \text{si } x < (1-c^2)y \\ (1-\epsilon) c \sqrt{x} + \epsilon (c^2 x + (1-c^2)(y-x)) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu^{A^i}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x}) = 2 \begin{cases} (1-\epsilon) c \sqrt{x} + \epsilon 2c \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x} \sqrt{x} & \text{si } x < (1-c^2)y \\ (1-\epsilon) c \sqrt{x} + \epsilon (c^2 x + (1-c^2)(y-x)) & \text{sinon} \end{cases}$$

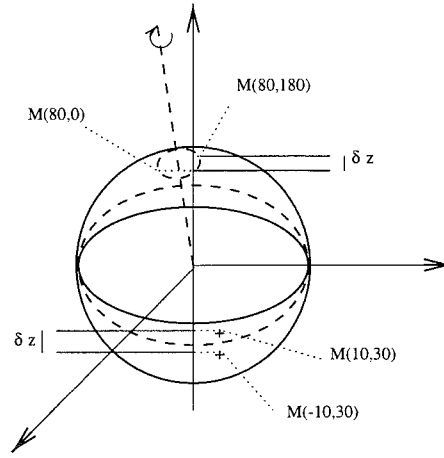


FIG. 2.3 – Approximations des fonctions poids associées aux opérateurs M : la composante sur l'axe de visée pour un point visible aux phases ϕ et $\phi + \pi$, est considérée comme inchangée entre ces deux dates. Par ailleurs, dans la région non toujours visible, un point et son symétrique par rapport à l'équateur sont supposés avoir même composante sur l'axe de visée. Ainsi, l'opérateur M^i est l'opérateur nul.

$$\mu^{M^p}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x}) = 2 \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) \left((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x} + \right. \\ \left. \epsilon (c^2 x + (1-c^2)(y-x)) \right) & \text{si } x < (1-c^2)y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu^{M^i}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x}) = 0$$

Le système étant triangulaire, seuls les opérateurs M^p et A^i sont considérés.

Opérateur A^i

Soit l'équation d'Abel associée à A^i :

$$g_l^{A^i}(\sqrt{1-y}) = \int_0^y f_l^i(\sqrt{1-x}) \frac{K_l^{A^i}(x, y)}{\sqrt{y-x}} dx,$$

où $K_l^{A^i}(x, y)$ est déduit de l'expression de μ^{A^i} et de l'équation (2.9) :

$$K_l^{A^i}(x, y) = \begin{cases} 2 \left((1-\epsilon) c \sqrt{x} + \epsilon 2c \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x} \sqrt{x} \right) T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) & \text{si } x < (1-c^2)y \\ 2 \left((1-\epsilon) c \sqrt{x} + \epsilon (c^2 x + (1-c^2)(y-x)) \right) T_{|l|} \left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'où, comme le noyau $K_l^{A^i}(x, y)$ est continue, différentiable sur $[0, 1]^2$ sauf en $x = 1$ et $y = 1$:

$$\frac{\partial K_l^{A^i}}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} -2(1-\epsilon)c\sqrt{x}\frac{lU_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right)}{2\sqrt{(1-y)(1-x)}} \\ + 2\epsilon c\sqrt{1-c^2}\sqrt{x}\left(\frac{T_{|l|}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right)}{\sqrt{y-x}} - \frac{l\sqrt{y-x}U_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right)}{\sqrt{(1-y)(1-x)}}\right) & \text{si } x < (1-c^2)y \\ -2(1-\epsilon)c\sqrt{x}\frac{lU_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right)}{2\sqrt{(1-y)(1-x)}} \\ + 2\epsilon\left((1-c^2)T_{|l|}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right) - (c^2x + (1-c^2)(y-x))\frac{lU_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x}}\right)}{2\sqrt{(1-y)(1-x)}}\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que $K_l^{A^i}(y, y) = 2(1-\epsilon)c\sqrt{y} + 2\epsilon c^2 y$ ne s'annule pas sauf en $y = 0$. L'injectivité au voisinage de $y \sim 0$ est étudiée en annexe 2.2. Dans un premier temps, une équation de Volterra de première espèce, avec un noyau plus régulier, est obtenue par multiplication des deux membres de l'équation par $\frac{1}{\sqrt{z-y}}$ et intégration par rapport à y , voir théorème 8. Posons pour cela :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_l^{A^i}(\sqrt{1-z}) &= \int_0^z \frac{g_l^{A^i}(\sqrt{1-y})}{\sqrt{z-y}} dy \quad \text{et} \\ H_l^{A^i}(x, z) &= \int_0^1 \frac{K_l^{A^i}(x, x + (z-x)u)}{\sqrt{u(1-u)}} du, \end{aligned}$$

l'équation devient alors:

$$\tilde{g}_l^{A^i}(\sqrt{1-z}) = \int_0^z f_l^i(\sqrt{1-x}) H_l^{A^i}(x, z) dx.$$

Dans un second temps, en calculant,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) &= \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial y} K_l^{A^i}(x, x + (z-x)u) \sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du \quad \text{et} \\ H_l^{A^i}(z, z) &= 2\pi c^2 z, \end{aligned}$$

une équation de seconde espèce est obtenue après dérivation :

$$\frac{d}{dy} \tilde{g}_l^{A^i}(\sqrt{1-z}) = 2\pi \left((1-\epsilon)c\sqrt{z} + \epsilon c^2 z \right) f_l^i(\sqrt{1-z}) \quad (2.15)$$

$$+ \int_0^z f_l^i(\sqrt{1-x}) \frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) dx \quad (2.16)$$

La dérivée partielle de $K_l^{A^i}$ étant bornée pour $x \neq 1$ et $y \neq 1$, le noyau de l'intégrale (2.15) est borné, ce qui permet de conclure, d'après le théorème 5, à l'unicité de la solution dans $C^0(D)$.

Opérateur M^p

La fonction μ^{M^p} étant nulle dans l'ellipse, les fonctions de F_c appartiennent au noyau de l'opérateur. Après changement de variable de x en $x(1-c^2)$ l'équation (2.8) s'écrit :

$$g_l^{M^p}(\sqrt{1-y}) = \int_0^y f_l^p\left(\sqrt{1-x(1-c^2)}\right) K_l^{M^p}(x, y) dx,$$

avec

$$K_l^{M^p}(x, y) = 2i \operatorname{sgn}(l) \frac{U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-x(1-c^2)}} \\ \left((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x(1-c^2)} + \epsilon (1-c^2)^2 (y - (1-c^2)x) \right)$$

Comme précédemment, une équation de seconde espèce est obtenue par dérivation par rapport à la variable y . La dérivée partielle du noyau est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} K_l^{M^p}(x, y) &= 2i(1-\epsilon) \operatorname{sgn}(l) \frac{\sqrt{1-c^2}}{2\sqrt{y-(1-c^2)x}} \frac{U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-x(1-c^2)}} \\ &- i(1-\epsilon) \operatorname{sgn}(l) \left(\sqrt{1-c^2} \sqrt{y-(1-c^2)x} \right) \frac{dU_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-y}(1-x(1-c^2))} \\ &+ 2i\epsilon \operatorname{sgn}(l) (1-c^2)^2 \frac{U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-x(1-c^2)}} \\ &- i\epsilon \operatorname{sgn}(l) (1-c^2)^2 (y - (1-c^2)x) \frac{dU_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-x(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-y}(1-x(1-c^2))}. \end{aligned}$$

Le noyau est continu, différentiable et sa dérivée partielle par rapport à y est bornée sauf en $y = 1$. Par ailleurs,

$$K_l(y, y) = 2i \operatorname{sgn}(l) \left((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} c \sqrt{y} + \epsilon c^2 (1-c^2) y \right) \frac{U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-y(1-c^2)}}\right)}{\sqrt{1-x(1-c^2)}}$$

ne s'annule pas sauf en $y = 0$ et aux racines des polynômes de Tchebitchev. Ces singularités sont étudiées en annexe 2.1. Après dérivation, l'équation de Volterra de seconde espèce est obtenue :

$$\frac{d}{dy} g_l^{M^p}(\sqrt{1-y}) = K_l(y, y) f_l^p\left(\sqrt{1-y(1-c^2)}\right) + \int_0^y f_l^p\left(\sqrt{1-x(1-c^2)}\right) \frac{\partial}{\partial y} K_l^{M^p}(x, y) dx \quad (2.17)$$

dont on conclut, d'après le théorème 5, l'injectivité dans $C^0(D)$.

En résumé, comme dans la section précédente 2.2.2 nous concluons que, sous les hypothèses du modèle mentionnées en début de paragraphe, **le noyau de l'opérateur**

d'imagerie Doppler est restreint, pour les angles intermédiaires à $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 90^\circ$, à quelques fonctions radiales : \mathcal{F}_r et aux fonctions jamais visibles \mathcal{F}_c . De même le noyau est confondu pour $\alpha = 0^\circ$ avec \mathcal{F}_c et pour $\alpha = 90^\circ$ avec l'ensemble des fonctions impaires.

2.2.4 Inversibilité : cas général sans approximations

Dans le cas général, les opérateurs ont été étudiés séparément. Les mêmes conclusions que dans les deux modèles précédents peuvent être formulées. Cependant, nous n'avons pas su montrer l'injectivité du système c'est à dire l'indépendance des quatre blocs, sans avoir recours aux approximations permettant d'obtenir un système triangulaire. L'idée pour étudier l'inversibilité du système est d'obtenir une équation de Volterra de seconde espèce sous la forme :

$$\begin{pmatrix} g_l^S(y) \\ g_l^M(y) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} K_l^{Ap}(y, y) & K_l^{Ai}(y, y) \\ K_l^{Mp}(y, y) & K_l^{Mi}(y, y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_l^p(y) \\ f_l^i(y) \end{pmatrix} + \int_0^y \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Ap}(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Ai}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mi}(x, y) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_l^p(x) \\ f_l^i(x) \end{pmatrix} dx$$

et de montrer d'une part que le déterminant $K_l^{Ap}(y, y) K_l^{Mi}(y, y) - K_l^{Ai}(y, y) K_l^{Mp}(y, y)$ est non nul $\forall y \in [0, 1]$ et d'autre part que chacun des noyaux, dans l'intégrale, est de carré sommable.

La difficulté tient essentiellement à la discontinuité des poids μ^{Mp} et μ^{Mi} . En effet pour les opérateurs A , l'équation d'Abel est transformée en une équation de Volterra de première espèce avec un noyau plus régulier. Comme les fonctions poids ne s'annulent pas sur la diagonale, il en est de même du noyau plus régulier. On obtient ainsi sans difficulté une équation de première espèce. Par contre les opérateurs M s'annulent sur leur diagonale. On dérive une première fois pour obtenir un noyau non nul sur la diagonale. Or, le noyau ainsi obtenu n'est plus continu ce qui posera une difficulté supplémentaire lorsqu'on cherche à dériver le noyau à nouveau pour obtenir une équation de première espèce. Il est cependant facile de montrer que le noyau contient : des fonctions dont le support est inclus dans la partie jamais visible (ensemble des points de l'hémisphère sud de latitudes inférieures à l'angle d'inclinaison), des fonctions impaires dans le cas où l'axe de rotation est perpendiculaire à l'axe de visée, et de certaines fonctions radiales. En effet, les poids μ^{Mp} et μ^{Mi} associés aux opérateurs M^p et M^i , sont des fonctions antisymétriques par rapport à la variable d'intégration. Ainsi, la première harmonique de la fonction appartient

au noyau de ces deux opérateurs. Or il a été vu, sans approximations, que les opérateurs A^p et A^i sont injectifs.

Ainsi, soit $f^i \in F_r$, alors $g^{A^i}(\omega, s) = A^i f^i(\omega, s)$ est une fonction radiale (ne dépendant pas de ω). Par conséquent, il existe une unique fonction f^p telle que $f^p = -A^{p-1} A^i f^i$ et cette fonction est radiale et appartient bien au noyau de l'opérateur M^i . En résumé l'ensemble de fonctions \mathcal{F}_r appartient effectivement au noyau de l'opérateur d'imagerie Doppler.

En conclusion, le caractère mal posé ainsi prouvé par la non-unicité de la solution inciterait au moins à chercher la solution de moindres carrés de moindre norme. Par ailleurs, nous allons voir que les équations de Volterra non dégénérées sont forcément instables. Donc, en vue d'une application numérique, une forme régularisée du problème doit donc être adoptée. Le conditionnement qu'il serait intéressant d'étudier n'est par contre pas abordé ici. Soulignons cependant que Natterer [105] a montré qu'en tomographie, les valeurs singulières σ_m de l'opérateur décroissent selon une loi en $1/\sqrt{m}$ et qu'ainsi le caractère mal-posé était peu prononcé.

Chapitre 3

Méthodologies pour l'inversion

Sommaire

3.1	Théorie de la régularisation	70
3.1.1	Problème mal posé et équations intégrales de première espèce	70
3.1.2	Régularisation de Tikhonov	74
3.1.3	Régularisation par maximum d'entropie	77
3.1.4	Choix du paramètre de régularisation	79
3.2	Modèles numériques	81
3.2.1	Description de l'algorithme pour l'inversion numérique de l'équation d'Abel	81
3.2.2	Méthode Algébrique de Reconstruction de la transformée de Radon	85
3.3	Quelques résultats issus des reconstructions	89
3.3.1	Caractérisation des fonctions radiales	89
3.3.2	Quelques résultats sur l'analyse de la stabilité	102

C'est à Hadamard que l'on doit, au début du siècle, d'avoir formulé explicitement les propriétés requises pour qu'un problème de reconstruction soit fiable. Un problème inverse sera dit bien posé, au sens d'Hadamard, si l'existence, l'unicité et la stabilité de la solution sont garanties [71]. Le choix de ces critères repose essentiellement sur l'observation des phénomènes physiques qu'essaye de traduire le problème mathématique. Ainsi, comme formulé par Courant et Hilbert en 1956: "... a mathematical problem cannot be considered as realistically corresponding to physical phenomena unless a variation of the given data in a sufficiently small range leads to an arbitrary small change in the solution." Or, la plupart des problèmes qui s'écrivent sous forme d'équations de Fredholm de première espèce, sont instables. Le problème de reconstruction en imagerie Doppler en est un exemple. Comme vu dans le chapitre précédent, il peut être écrit sous la forme d'un système couplé de

transformées de Radon généralisées et donc d'équations intégrales de Volterra (cas particulier des équations de Fredholm) dont nous avons montré la non-injectivité et deviné l'instabilité. Ceci conduit naturellement à chercher, du problème initial, une forme qui lui est proche et dont on puisse garantir la fiabilité. Le problème est alors dit régularisé.

Dans ce chapitre, quelques points de la théorie de la régularisation de Tikhonov et d'autres types de régularisations sont rappelés, ce qui nous conduira au choix d'une méthode numérique de reconstruction.

3.1 Théorie de la régularisation

Les deux sections qui suivent présentent un résumé très succinct de la théorie de la régularisation. Nous nous sommes essentiellement référés aux deux ouvrages de Groetsch [71, 72] et le premier chapitre de [115].

3.1.1 Problème mal posé et équations intégrales de première espèce

Conditions d'Hadamard

Dans le chapitre précédent, nous avons montré comment le problème d'imagerie Doppler s'exprimait simplement sous forme d'un système de quatre transformées de Radon généralisées, voir section 2.1.3. Ainsi, la décomposition de la fonction cherchée en ses harmoniques sphériques revient à identifier, $\forall l \in \mathbb{N}$ les coefficients $f_l(r), r \in [0..1]$ tels que :

$$\begin{pmatrix} a_l \\ m_l \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_l^+ & A_l^- \\ M_l^+ & M_l^- \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f_l^+ \\ f_l^- \end{pmatrix},$$

où chacun des opérateurs est une équation de Volterra. Si $f_l = (f_l^+, f_l^-)^t$ est l'inconnue et $g_l = (a_l, m_l)^t$ la mesure, le système équivaut à :

$$g_l(y) = \int_0^y K_l(x, y) f_l(x) dx.$$

Ainsi, l'équation peut s'écrire $g = Kf$, où $K : X \rightarrow Y$ est l'opérateur précédent pour l'une quelconque des valeurs de l .

Quelques remarques : la fonction g hérite des propriétés de régularité du noyau K . En particulier, si ce dernier est continu et que la fonction f est intégrable, alors les mesures seront continues. Si tel n'est pas le cas c'est à dire si g n'est pas continue, l'équation peut ne pas avoir de solutions intégrables. L'unicité de la solution n'est également pas garantie, ce qui s'est avéré être le cas en imagerie Doppler. Il suffirait cependant de choisir convenablement les espaces de travail pour que la condition d'unicité soit vérifiée. Sous

cette seule condition, le problème reste loin d'être satisfaisant pour le physicien. En effet, les données étant issues de mesures, elles sont entachées d'erreurs. Si une faible variation de la fonction g conduit à une variation importante sur la fonction cherchée, la reconstruction est instable. Cette instabilité vient que dans la plupart des équations de première espèce, la solution ne dépend pas continûment des données. Elle s'explique simplement, dans notre cas, par le fait que nous ayons à résoudre un système de transformées de Radon généralisées ce qui nécessite de connaître la dérivée des mesures. Cette dernière opération est instable et rend vain la résolution du système si aucune autre contrainte n'est apportée. Le fait que l'opérateur inverse soit non borné est une conséquence du fait que l'opérateur soit compact¹. Ces considérations ont ainsi amené Hadamard à établir la définition du caractère bien posé d'un problème inverse sur trois critères :

- existence de la solution : $\forall g \in Y, \exists f \in X, g = Kf$.
- unicité de la solution : $\exists! f$.
- continuité de l'opérateur inverse : K^{-1} est continu.

Il s'ensuit que le caractère bien posé d'un opérateur ne dépend pas seulement de K mais aussi des espaces de travail. La régularisation consiste à transformer un problème mal posé en un problème bien posé. D'où deux approches pour régulariser :

- par le choix des espaces de travail,
- par l'ajout de contraintes supplémentaires ce qui revient à modifier l'opérateur.

Soulignons que la condition de continuité est nécessaire mais pas suffisante pour assurer la stabilité vis à vis du bruit d'un opérateur K . La propagation des erreurs est contrôlée par le nombre de conditionnement, $\text{cond}(K)$ défini comme le rapport des valeurs singulières extrêmes. Si g^δ et f^δ représentent respectivement les estimations de g et f , alors :

$$\left\| \frac{f^\delta}{f} \right\| \leq \text{cond}(K) \left\| \frac{g^\delta}{g} \right\|.$$

Ainsi lorsque le nombre de conditionnement est élevé, l'erreur de reconstruction est mal contrôlée et le problème bien posé est dit mal conditionné.

1. Un opérateur borné K est dit compact si quelque soit A un sous ensemble borné de H_1 , $\overline{K(A)}$ est compact.

Opérateurs compacts auto-adjoints

Dans la suite, les espaces X et Y sont des espaces de Hilbert, en particulier l'espace des fonctions de carré sommable. Ils sont notés H_1 et H_2 . Quelques résultats fondamentaux des opérateurs compacts auto-adjoints et la notion d'inverse généralisée sont rappelés.

Théorème 9 *Si $K(x, y)$ est de carré sommable sur $0 \leq x, y \leq 1$ alors*

$$Kf = \int_0^1 K(x, y)f(y) dy,$$

est un opérateur compact sur $L^2[0, 1]$, [82].

Ainsi, les opérateurs mis en jeu dans le système de transformées de Radon sont des opérateurs compacts. Entre autre, pour les équations d'Abel, des équations de Volterra avec un noyau borné peuvent être obtenues.

Théorème 10 *Si $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur continu, alors $R(K)^\perp = \text{Ker}(K^*)$ et $R(K^*)^\perp = \text{Ker}(K)$ où R et Ker désignent l'image et le noyau et K^* l'adjoint de K .*

Ceci conduit naturellement à la décomposition orthogonale :

$$H_1 = \text{Ker}(K) + \overline{R(K^*)}, \quad H_2 = \text{Ker}(K^*) + \overline{R(K)}.$$

Un autre résultat important concerne le spectre des opérateurs auto-adjoints et compacts. Les valeurs propres de l'opérateur forment une suite λ_k qui converge vers zéro. Par ailleurs, la suite de vecteurs propres constituée à partir des valeurs propres selon leur ordre de multiplicité, forme un système orthonormal, ce qui conduit au théorème suivant :

Théorème 11 *Soit K de $H \rightarrow H$ un opérateur auto-adjoint dont les valeurs propres unitaires λ_k sont associées aux vecteurs propres w_k , alors,*

$$\forall f \in H, Kf = \sum_k \lambda_k (f \cdot w_k) w_k.$$

Cette somme peut être finie ou non selon le rang de K . L'équation intégrale de Fredholm de rang fini correspond aux opérateurs dégénérés c'est à dire du type : $K(x, y) = \sum_{k=1}^n X_k(x) Y_k(y)$.

L'opérateur K^*K est un opérateur auto-adjoint. Ses valeurs propres sont donc positives et notées λ_k^2 . En notant v_k les vecteurs propres associés (normalisés), $\mu_k = 1/\lambda_k$ et $u_k = \mu_k K v_k$, alors $\{u_k\}$ est un système orthonormal de H_2 et $\mu_k K^* u_k = v_k$. Plus exactement, $\{u_k\}$ forme une base orthonormale de $\overline{R(K)}$ et $\{v_k\}$ une base orthonormale de $\overline{R(K^*)}$. La suite $\{u_k, v_k, \mu_k\}$ est appelée système singulier de K et pour que $Kx = g$ ait une solution il est nécessaire et suffisant que $g \in \overline{R(K)}$ et $\sum_{k=1}^\infty \mu_k^2 |g \cdot u_k|^2 < \infty$. Ce théorème est

connu sous le nom de théorème de Picard. Ceci signifie que les composantes $|g \cdot u_k|$ doivent décroître suffisamment vite par rapport à l'augmentation des μ_k ($\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = \infty$ si le noyau n'est pas dégénéré). La représentation spectrale est l'outil de base dans l'étude des opérateurs auto-adjoints. Elle est résumée par le théorème suivant :

Théorème 12 *Pour tout vecteur f de $R(K)$ et pour tout vecteur g de $R(K^*)$*

$$Kf = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k (f \cdot v_k) u_k \text{ et } K^*g = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k (g \cdot u_k) v_k,$$

où N est le rang de K ($N = \infty$ si K n'est pas de rang fini).

Inverse généralisé

Dans la plupart des cas, résoudre $Kf = g$ revient à dire que K^{-1} existe et est continu, ce qui nous l'avons vu est rarement vérifié. C'est pourquoi on est amené à introduire une notion plus générale de l'inverse d'un opérateur borné. Ainsi, plutôt que d'étudier si l'équation admet une solution unique, est cherchée la solution la plus proche c'est à dire f_0 telle que

$$\|Kf_0 - g\|^2 = \inf \{\|Kf - g\|^2, f \in H_1\}.$$

Cette solution est dite de moindres carrés. Elle est obtenue par résolution de l'équation normale:

$$K^*Kf = K^*g \text{ ou encore } Kf = Pg,$$

avec P projecteur orthogonal de H_2 sur $\overline{R(K)}$. Dans l'ensemble des solutions de moindres carrés et de moindre norme, il existe une unique fonction f de norme minimale. Elle est notée $K^\dagger g$ et est appelée **inverse généralisée de Moore-Penrose**.

Théorème 13 *K^\dagger est borné si et seulement si $R(K)$ est fermé.*

Corollaire 1 *Si $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur linéaire compact alors K^\dagger est borné si et seulement si $R(K)$ est de dimension finie.*

Ainsi, l'opérateur $K : \text{Ker}(K)^\perp \rightarrow R(K) + R(K)^\perp$ n'est bien posé que si l'opérateur est de rang fini ce qui équivaut à un noyau de Fredholm dégénéré et est rarement le cas. Même si en pratique, le problème doit être résolu en dimension finie, avec l'augmentation du nombre de mesures, le conditionnement de la matrice décroît et le comportement de l'opérateur tend à refléter celui traité dans le cadre de dimension infinie.

Théorème 14 *Si $K : H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur compact et $\{u_k, v_k, \mu_k\}$ son système singulier associé, si $g \in R(K) + R(K)^\perp$ alors $K^\dagger g = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k (g \cdot u_k) v_k$.*

En conclusion, ceci signifie que quelque soit l'opérateur de Fredholm de type non dégénéré, la stabilité ne peut être assurée sans l'ajout d'une condition supplémentaire. La régularisation de type Tikhonov fait ainsi l'objet de la section suivante.

3.1.2 Régularisation de Tikhonov

L'intégrale de Fredholm de première espèce : $g(y) = \int_a^b f(x)K(x, y)dx$ est dans la plus part des cas mal posée (exception faite pour les noyaux dégénérés). Ainsi, l'inverse généralisé, $K^\dagger g$, est instable au sens où une petite perturbation sur les mesures (en particulier si le bruit est très oscillant) induit une déviation importante de la solution. Cette instabilité tient au fait que l'inverse généralisé ne dépend pas continûment des mesures. Le problème initial doit donc être transformé en un problème stable c'est à dire physiquement acceptable. Dans cette section est présenté un résumé de la régularisation de type Tikhonov. Par la suite, nous utiliserons ce critère de régularisation.

Une manière simple de réduire les oscillations est d'approximer la solution de moindres carrés et de moindre norme par la solution du problème de minimisation de la fonctionnelle :

$$L_\tau : H_1 \rightarrow H_2$$

$$f \rightarrow \int_a^b (Kf(y) - g(y))^2 dy + \tau \int_a^b p(y) f^2(y) + q(y) \left(\frac{d}{dy} f(y) \right)^2 dy.$$

L'idée est d'introduire un compromis entre la fidélité aux mesures et la stabilité de la solution. Tout minimum vérifie :

$$\frac{d}{dt} \{L_\tau(f + t\omega)\}_{t=0} = 0, \forall \omega \in H_1,$$

ce qui donne

$$\int_a^b K(x, y)g(y)dy = \int_a^b H(x, y)f(y)dy + \tau \left(p(x)f(x) - \left(q(x)f''(x) + q'(x)f'(x) \right) \right)$$

où

$$H(x, z) = \int_a^b K(x, y)K(z, y) dy$$

est un opérateur auto-adjoint et

$$f'(a) = f'(b) = 0.$$

Cette équation est une équation de Fredholm de seconde espèce qui admet une solution unique. Dans le cas où le problème initial est une équation de Volterra, $g(y) = \int_0^y K(x, y)f(x) dx$, la régularisation de Tikhonov conduit à la même équation de Fredholm mais l'opérateur auto-adjoint s'écrit plus précisément :

$$H(x, z) = \int_{\max(x, z)}^1 K(x, y)K(z, y) dy.$$

Par commodité on a posé $q(x) = 1$. Une approche classique consiste à écrire l'équation de minimisation sous la forme:

$$\|Kf - g\|^2 + \tau\|f\|^2 \quad (3.1)$$

La solution de cette équation est ainsi donnée par l'équation normale :

$$K^*g = K^*Kf + \tau f. \quad (3.2)$$

Les valeurs propres de $\tilde{K} = K^*K$ sont positives. Par conséquent celles de l'opérateur $\tilde{K} + \tau I$ sont strictement positives. L'inverse de ce dernier opérateur est borné et le nouveau problème est bien posé. La solution $f_\tau = (\tilde{K} + \tau I)^{-1}K^*g$ est appelée approximation de Tikhonov de $K^\dagger g$.

Quel que soit le type de régularisation, il convient de s'assurer que, lorsque le paramètre de régularisation tend vers zéro, la solution tend vers l'inverse généralisé. Ceci est vrai pour la régularisation de Tikhonov. La démonstration repose sur une décomposition en valeurs singulières [72]. Le corollaire suivant donne une limite supérieure de la convergence de la solution vers l'inverse généralisé.

Corollaire 2 *Soit $K^\dagger g$ la solution de moindres carrés et de moindre norme, et $f_\tau = (\tilde{K} + \tau I)^{-1}K^*g$. Si $K^\dagger g \in R(\tilde{K}^\nu)$ pour $\nu \in]0, 1]$, alors*

$$\|K^\dagger g - f_\tau\| = \mathcal{O}(\tau^\nu).$$

Ainsi, l'approximation la meilleure obtenue est en $\mathcal{O}(\tau)$ et il est montré que cette borne n'est atteinte que sous la condition $K^\dagger g \in R(\tilde{K})$.

Il convient de s'interroger maintenant sur la solution obtenue dans le cas réel où les mesures sont bruitées. En effet comme souligné, la difficulté dans la résolution des équations de première espèce tient à l'inexactitude des données mesurées. Supposons que l'estimation des données, g^δ , soit telle que :

$$\|g - g^\delta\| \leq \delta, \quad (3.3)$$

où δ est le niveau de bruit *a priori* mesuré. Ainsi, la solution régularisée est $f_\tau^\delta = (\tilde{K} + \tau I)^{-1}K^*g^\delta$. Dans la mesure où dans le cas d'un signal à bruit infini, la solution converge bien vers $K^\dagger g$, l'idée est alors de comparer f_τ^δ avec f_τ . Il est montré que:

$$\|f_\tau^\delta - f_\tau\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\tau}}.$$

Cette inégalité traduit la limite de stabilité de la solution évaluée à partir de mesures entachées d'erreurs. En effet, à niveau de bruit donné, la majoration sur l'erreur augmente

lorsque le paramètre de régularisation décroît. Ceci est une conséquence de l'instabilité du problème initial. Ainsi le choix du paramètre de régularisation influe sur le contrôle de l'erreur et il est important de le choisir de sorte que l'approximation tende vers la solution de moindres carrés et de moindre norme quand le bruit tend vers zéro. L'algorithme est alors dit régulier. Comme

$$\|f_\tau^\delta - K^\dagger g\| \leq \frac{\delta}{\sqrt{\tau(\delta)}} + \|f_{\tau(\delta)} - K^\dagger g\|,$$

une condition suffisante pour que l'approximation de Tikhonov soit régulière est que le paramètre vérifie :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^2 / \tau(\delta) = 0$$

Des limites sur le taux de convergence ont été établies. Ainsi, si le paramètre de régularisation varie comme la puissance 2/3 du bruit, alors l'approximation $\|f_\tau^\delta - K^\dagger g\|$ est en $\mathcal{O}(\delta^{2/3})$. Cette borne n'est atteinte que sous la condition $K^\dagger g \in R(\tilde{K})$. Il est prouvé que ce taux de convergence est optimal au sens où on ne peut espérer le dépasser. Nous reviendrons ultérieurement sur le choix du paramètre de régularisation. En effet si la condition énoncée, $\delta^2 / \tau(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0$ est suffisante pour assurer que l'algorithme est régulier, il peut être plus judicieux de choisir le paramètre *a posteriori*. Entre autre le principe de Morozov consiste à choisir τ de telle sorte que le résidu soit en accord avec le niveau de bruit : $\|K f_\tau^\delta - g^\delta\| = \delta$. Un autre principe très couramment utilisé est le critère de validation croisée basé sur "l'efficacité" du paramètre à prédire les données manquantes.

La régularisation de Tikhonov est très usitée. En effet, dans de nombreuses applications physiques il est raisonnable de sélectionner la solution la plus régulière possible, auquel cas le critère porte sur la minimisation du gradient. En imagerie Doppler, ce critère a été de choix dans les premiers algorithmes [66, 67]. Piskunov [110] compare ce critère à celui du maximum d'entropie. La solution trouvée avec ce premier critère est naturellement plus régulière. En effet, la minimisation du gradient peut être comprise, d'un point de vue analyse de Fourier, comme un filtre dont la fréquence de coupure sera d'autant plus élevée que la résolution des données et la couverture en phase seront bonnes. Un autre argument d'ordre physique, avancé en faveur de la régularisation de Tikhonov, est que la distribution de température en surface est déterminée par le transfert d'énergie et le champ magnétique. En conséquent, la corrélation entre régions voisines est forte. En synthèse de Fourier, le critère de régularisation est aussi de type Tikhonov. Le problème est de déterminer sous quelles conditions il est possible d'interpoler ou d'extrapoler dans une région donnée du domaine de Fourier, la transformée de Fourier d'une fonction à support compact [93, 94]. L'extrapolation spectrale complète conduit à un problème mal conditionné et doit être reformulé en termes d'interpolation ou d'extrapolation en champ partiel [121]. La

régularisation porte alors sur la minimisation de la fonction à reconstruire en dehors d'une région bornée de l'espace des fréquences.

3.1.3 Régularisation par maximum d'entropie

La définition de l'entropie dans la théorie de l'information et l'idée de sélectionner l'image qui la maximise sont empruntées à la mécanique statistique, en particulier aux travaux de Boltzman. L'objectif est d'évaluer la stabilité d'un système. Soit un système de N éléments (par exemple, N molécules de gaz) répartis d'après une propriété qui les caractérise, dans n cellules (qui pourraient représenter l'espace des phases). L'état du système est entièrement décrit par la partition $(N_1, N_2, N_3, \dots, N_n)$ vérifiant $\sum_{i=1}^n N_i = N$, N_k désignant le nombre d'éléments (de molécules) dans la $k^{\text{ème}}$ cellule. Le nombre de combinaisons des N éléments qui donnent cette partition est :

$$W = C_N^{N_1} C_{N-N_1}^{N_2} C_{N-N_1-N_2}^{N_3} \dots C_{N-N_1-N_2-\dots-N_{n-1}}^{N_n} = \frac{N!}{N_1! N_2! N_3! \dots N_n!}.$$

L'état du système sera d'autant plus stable que ce nombre est grand. L'approximation de Stirling permet d'obtenir (pour N assez grand), une bonne estimation de ce nombre :

$$\ln W = - \sum_{k=1}^n N_k \ln \frac{N_k}{N}.$$

Ainsi à N fixé, le système le plus stable est obtenu en maximisant $-\sum p_k \ln p_k$ où $p_k = N_k/N$ représente par exemple, la probabilité qu'une molécule de gaz occupe la $k^{\text{ème}}$ cellule de l'espace des phases.

Une image peut être vue comme une partition de l'espace en s pixels. Le nombre N_k peut figurer le flux dans chaque pixel. Si les pixels sont indépendants (dans le cas contraire, N_k/N ne représente plus la probabilité d'occupation de la $k^{\text{ème}}$ cellule dans la mesure où intervient alors la probabilité conditionnelle), et si le critère servant à décrire le système (le nombre de molécules dans chaque niveau de l'espace des phases, le flux dans chaque pixel...) est additif (conservation du nombre de molécules, le flux total est la somme des flux de chacun des pixels...) alors maximiser l'entropie revient à trouver le système le plus stable au sens du "plus probable" (ce qui dans la pratique signifie, pour une image, celle compatible avec les données ayant le "moins de détails"). La distribution obtenue en maximisant l'entropie sans contraintes supplémentaires est la distribution uniforme : $p_k = 1/n$. Ce choix n'est pas déraisonnable en l'absence de toute autre information. Une manière simple d'introduire une information a priori de l'image à reconstruire est de maximiser $-\sum p_k \ln p_k/p_{k_0}$. La distribution compatible "la plus proche" de p_{k_0} est alors cherchée. Ce critère de régularisation est sous la forme générale $\sum p_k \ln p_k/p_{k_0} + (p_{k_0} - p_k)$, connu sous le nom d'entropie croisée généralisée.

Le concept de maximum d'entropie s'entend ainsi mieux dans un cadre probabiliste. Aussi dans la théorie de la régularisation, deux approches sont à distinguer : la première de type déterministe comme décrite dans les paragraphes ci avant, la seconde plus récente, de type probabiliste, qui doit au développement de la théorie de l'information. De nombreux travaux ont tenté d'unifier ces deux approches telle que l'interprétation Bayésienne. Le principe de maximum d'entropie sur la moyenne (MEM) donne également une interprétation probabiliste de critères de régularisation déterministes [99]. L'objet x à reconstruire est alors une variable aléatoire à laquelle est associée la densité de probabilité p . Une fois celle-ci trouvée, il est cohérent de choisir comme objet particulier, la moyenne selon p de la variable x . Le problème primal exprime la recherche de la densité de probabilité qui maximise une fonctionnelle $H_\mu(p)$ et telle que l'espérance mathématique $E_p\{x\} = \int xp(x)d\mu(x)$ vérifie les contraintes $AE_p\{x\} = y$. Le choix de la mesure de probabilité μ n'est pas arbitraire puisque, comme il va être vu, il impose, dans un cadre déterministe, le principe de régularisation. Le problème d'optimisation s'écrit :

$$(\mathcal{P}_\mu) \quad \begin{cases} \sup_{p \in \varpi(\mu)} \{-H_\mu(p)\} \\ \text{IA}p = y \end{cases}$$

A l'aide de la théorie de la dualité [95, 39, 81], née avec l'introduction des coefficients de Lagrange λ , le problème dual équivalent peut être déduit :

$$(\mathcal{D}_\mu) \quad \max_{\lambda \in \mathbb{R}^n} \{y \cdot \lambda - H^*(\text{IA}^*\lambda)\}.$$

Celui-ci est équivalent à un autre problème dual lui même associé au problème primal :

$$(\mathcal{P}'_\mu) \quad \begin{cases} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F^*(x) \\ Ax = y \end{cases},$$

où F est une fonctionnelle dépendant de la mesure μ : $F_\mu(x) = \ln \int e^{x \cdot \xi} d\mu(\xi)$. Si l'erreur $b = Ax - y$ est également vue comme une variable aléatoire, le problème s'écrit :

$$(\mathcal{P}''_\mu) \quad \begin{cases} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} F_\mu^*(x) + F_\nu^*(b) \\ Ax = y \end{cases},$$

ce qui équivaut à :

$$(\mathcal{P}''_\mu) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{F_\mu^*(x) + F_\nu^*(y - Ax)\}.$$

Ainsi tandis que μ introduit une connaissance a priori du comportement statistique de la variable aléatoire x , le choix de ν doit lui dépendre du comportement statistique

de b c'est à dire du type de bruit. Si la mesure $d\mu$ est de type Gaussien (dont la matrice de covariance est B^*B), alors $F_\mu^*(x) = \|Bx\|^2$. Il s'agit là du critère de régularisation de Tikhonov qui favorise les solutions régulières. Par exemple dans Wipe [93, 94], ce critère vient pénaliser les hautes fréquences du signal. Si la mesure est de type Poissonien, le critère n'est autre que $F_\mu^*(x) = \sum_j (x_j \ln \frac{x_j}{x_{0j}} + (x_{0j} - x_j))$ c'est à dire l'entropie de Shannon. Le choix de ce critère n'est pas toujours judicieux. En effet, dans le cas du problème de synthèse d'ouverture, l'entropie influencerait non seulement sur les hautes fréquence mais aussi sur les basses fréquences remettant en cause le concept de résolution sur lequel est basée l'idée de Wipe.

Par ailleurs, le principe de MEM offre une nouvelle interprétation du contrôle de l'erreur en soulignant que le choix de la mesure qui permet d'évaluer la distance entre les données et l'image par A de la solution c'est à dire, le critère d'estimation de la fidélité aux données, doit être dicté par le type de bruit. Si le bruit est de type Gaussien alors une densité ν Gaussienne sera la mieux adaptée puisque selon le principe du maximum d'entropie sur la moyenne, la densité la plus proche de ν est cherchée. Le critère d'erreur est alors du type moindres carrés, $F_\nu^*(x) = \|y - Ax\|^2$. Si, comme en imagerie haute résolution d'objets faibles, le bruit est de type Poissonien, il sera plus pertinent de choisir comme mesure l'entropie de Shannon. Rappelons cependant que le bruit Poissonien se comporte asymptotiquement comme le bruit Gaussien.

3.1.4 Choix du paramètre de régularisation

Une fois le critère de régularisation fixé, le choix du poids à donner à la régularisation s'impose. Ce choix est issu du compromis réalisé entre la stabilité et la fidélité aux mesures et peut être fait *a priori* ou *a posteriori*.

Critère *a priori*

Deux résultats concernant le choix, *a priori*, du paramètre τ [71] sont essentiels:

- le problème considéré étant linéaire, le meilleur taux de convergence sur la solution qui peut être souhaité est en $\mathcal{O}(\delta)$, où δ est donné par (3.3). Dans le cas particulier où l'opérateur K est de rang fini, ce taux est atteint, c'est à dire $\|f - f_\tau^\delta\| = \mathcal{O}(\delta)$ si τ est proportionnel au bruit : $\tau = C\delta$.
- si K est non dégénéré, c'est à dire de rang infini, alors le taux de convergence optimal est en $\mathcal{O}(\delta^{2/3})$ et est atteint pour $\tau = C\delta^{2/3}$.

Critère a posteriori

Considérons maintenant les stratégies a posteriori. Elles s'appuient sur une estimation de l'écart entre :

- la solution et la vraie valeur, $\|f_\tau - f\|$: critère d'erreur d'estimation.
- l'image de la solution et les mesures, $\|Kf_\tau - g\|$: critère d'erreur de prédiction.

Principe du résidu

Commençons par le principe du résidu [71] énoncé par Morozov. Le paramètre de régularisation est choisi de telle sorte que l'erreur de reconstruction soit cohérente avec l'erreur faite sur les mesures. Il est supposé que : $\|g - g^\delta\| \leq \delta < \|g^\delta\|$, c'est à dire que le signal sur bruit est supérieur à l'unité. Alors, le critère de Morozov consiste à sélectionner la valeur du paramètre telle que : $\|Kf_\tau^\delta - g^\delta\| = \delta$. Le paramètre est ainsi uniquement déterminé. L'argument majeur en faveur de ce critère de choix de τ repose sur l'idée suivante. Si seul le bruit sur les données est connu, il est raisonnable de choisir le vecteur de moindre norme dans le convexe fermé : $C_\delta = \{z : \|Kz - g^\delta\| \leq \delta\}$ et ce vecteur est tel que $\|Kz_\tau^\delta - g^\delta\| = \delta$. On trouvera dans [71] p.46 une majoration de l'erreur sur la solution. Il est prouvé que la méthode du résidu est régulière, c'est à dire que la solution f_τ^δ tend vers f quand le bruit devient nul.

Critère de validation croisée

Le résultat de simulation prouve qu'il est crucial, lors de la programmation numérique d'une méthode d'inversion, de choisir le paramètre de régularisation en tenant compte des différentes erreurs faites plutôt que d'une erreur moyenne. C'est sur cette constatation que repose la méthode de validation croisée de Wahba [71] p.93. L'idée est de sélectionner le paramètre qui réalise la meilleure prédiction de mesures qui auraient été préalablement ôtées des données. Plus précisément, soit $f_{\tau,k}$ la solution du problème de minimisation lorsqu'il manque la $k^{\text{ème}}$ donnée :

$$f_{\tau,k} = \arg\left\{\min_f \frac{1}{m-1} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^m ((Kf)_i - g_i)^2 + \tau \|f\|^2\right\}.$$

Alors, la valeur retenue du paramètre est celle qui donne, en moyenne, l'erreur minimale entre la donnée prédite, $Kf_{\tau,k}$ et la donnée manquante g_k c'est à dire la valeur de τ qui minimise la fonction de validation croisée ordinaire :

$$\begin{aligned} VCO(\tau) &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m ((Kf_\tau)_k - g_k)^2, \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \frac{((I - A(\tau))g)_k^2}{(1 - A_{k,k}(\tau))^2}, \end{aligned}$$

avec $A(\tau)$, la matrice définie par $g_\tau = K f_\tau = A(\tau)g$ et $A_{k,k}(\tau)$ un élément de sa diagonale [40]. Le défaut majeur tient au coût exorbitant de l'évaluation de cette fonction puisque pour chaque valeur de τ , il faudra résoudre m problèmes d'optimisation et calculer pour les $A_{k,k}(\tau)$, les éléments de l'inverse d'une matrice. Nous verrons par la suite, section 3.2.2, comment cette difficulté a été contournée.

3.2 Modèles numériques

Dans cette section sont décrites deux méthodes numériques mises en oeuvre pour résoudre l'inversion en imagerie Doppler lorsque ce problème inverse est pensé en termes de tomographie généralisée. L'un des objectifs premiers de ces deux algorithmes est de caractériser les fonctions radiales. Nous mettons ensuite en évidence la difficulté de la reconstruction inhérente à leur existence.

Pour les étudier, la décomposition en harmoniques sphériques est bien appropriée. Aussi, le premier algorithme est basé sur l'équation d'Abel obtenue dans le chapitre précédent. Il effectue le calcul numérique de la partie radiale paire connaissant la partie radiale impaire d'une fonction. Le deuxième algorithme est une adaptation à l'imagerie Doppler d'un code de tomographie. Il s'agit d'une méthode algébrique de résolution du système couplé de transformées de Radon généralisées.

Dans une première partie, les deux algorithmes sont décrits. Quelques résultats concernant essentiellement le noyau et l'analyse de la stabilité du problème sont ensuite présentés.

3.2.1 Description de l'algorithme pour l'inversion numérique de l'équation d'Abel

Dans cette section sont présentés brièvement les deux algorithmes basés sur un modèle de l'imagerie Doppler sous forme de transformées de Radon.

Inversion numérique de la transformée d'Abel simple : solution directe

En premier lieu nous donnons une revue des méthodes numériques d'inversion de la transformée d'Abel. La méthode du point milieu sur laquelle est fondée notre code est détaillée. L'algorithme correspondant est alors déduit.

La définition et quelques propriétés de la transformée d'Abel sont données section 2.2.1. Son expression intégrale est :

$$g(y) = \int_0^y \frac{K(x,y)}{(y-x)^\nu} f(x) dx, \text{ avec } \nu < 1.$$

Dans le cas où la fonction poids est réduite aux indicatrices des parties visibles, nous avons vu que l'opérateur A^p est l'opérateur de transformée de Radon classique, soit l'équation d'Abel avec le noyau particulier : $K(x,y) = 1$. Le nouveau noyau plus régulier obtenu

par la procédure classique qui sied aux équations d'Abel, voir théorème 8, est $H(x, y) = \pi$. Par dérivation de l'équation de première espèce par rapport à y , l'expression analytique suivante de l'inverse est déduite :

$$f(y) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dy} \int_0^y \frac{g(x)}{\sqrt{y-x}} dx. \quad (3.4)$$

Cette expression donne lieu à un algorithme très simple où la solution est directement calculée. Cependant, la dérivation est une opération instable et rend le problème mal posé. Une erreur d'ordre ϵ sur la partie intégrée peut alors se traduire par une erreur d'ordre ϵ/h sur l'estimation de la dérivée (h étant le pas d'échantillonnage). Ainsi cette méthode ne peut être utilisée que si une erreur en $\mathcal{O}(\epsilon/h)$ reste acceptable.

Inversion numérique de la transformée d'Abel généralisée : méthode “d'intégration produit”

La méthode de résolution des équations de première espèce la plus simple à mettre en oeuvre est la méthode d'Euler. Elle repose sur la discrétisation de l'équation. En désignant par $ih, i \in \{0, \dots, n-1\}$ l'ensemble fini de points discrets en lesquels $f(x)$ est calculée, la solution du système triangulaire, discrétisation de l'équation (2.7), est donnée par :

$$f((m-1)h) = \frac{g(mh)}{hK((m-1)h, mh)} - \sum_{i=0}^{m-2} \frac{K(ih, mh)}{K((m-1)h, mh)} f(ih), \quad m \in \{1..n\},$$

sous l'hypothèse que le noyau ne s'annule pas sur sa diagonale ($K(y, y) \neq 0$). La précision sur la solution sera améliorée en préférant des méthodes d'intégration d'ordre supérieur² telle la méthode du point milieu, la méthode du trapèze....

Si le noyau est singulier, ce qui est le cas pour l'intégrale d'Abel, cet algorithme échoue. C'est pourquoi une autre méthode doit être envisagée. La méthode classique “d'intégration produit” permet de traiter les singularités. Elle intervient ainsi dans la résolution des équations de seconde comme de première espèce.

Principe de la méthode “d'intégration produit”

La transformation donnée par le théorème 8 pour la résolution numérique de l'équation est d'utilité pratique très relative du fait de la complexité du noyau. Il est préférable et plus simple d'utiliser la méthode dite “d'intégration produit” [97, 28]. Cette méthode d'usage courant pour l'évaluation numérique des équations intégrales consiste à écrire la fonction à intégrer sous la forme d'un produit d'une fonction singulière $P(x, y)$, dont on suppose

2. Une des difficultés de ces méthodes d'ordre supérieur est qu'elles supposent pour la première itération la connaissance d'une ou plusieurs valeurs de la fonction.

la primitive connue, par une fonction régulière $\psi(x, y)$:

$$\int_0^y K(x, y) f(x) dx = \int_0^y P(x, y) \psi(x, y) dx. \quad (3.5)$$

L'intervalle est divisé en sous intervalles : $[ih, (i+1)h], \forall i \in \{0..n-1\}$ avec $nh = y$. Sur chacun de ces intervalles, $\psi(x, y)$ est approximée par une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions :

$$\psi(x, y) \simeq \sum_{j=0}^{m-1} \psi_{i,j}(y) l_{i,j}(x), \quad ih \leq x \leq (i+1)h,$$

telles qu'il soit possible d'intégrer explicitement :

$$w_{i,j}(y) = \int_{ih}^{(i+1)h} P(x, y) l_{i,j}(x) dx.$$

Par conséquent, l'approximation faite sur l'intégrale de départ (3.5) est :

$$\begin{aligned} \int_0^y K(x, y) f(x) dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} P(x, y) \psi(x, y) dx, \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} P(x, y) \tilde{\psi}(x, y) dx = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \psi_{i,j}(y) w_{i,j}(y). \end{aligned}$$

En général, l'approximation consistera soit :

- à approcher la fonction par un polynôme par morceaux. Sur chacun des intervalles $[ih, (i+1)h]$, la fonction est interpolée par un polynôme passant par les points $(ih + jh', \psi(ih + jh', y))$. Ainsi avec :

$$l_{i,j}(x) = \frac{(x - ih) \dots (x - ih - (j-1)h') (x - ih - (j+1)h') \dots (x - ih - (m-1)h')}{jh' \dots h'(-h') \dots (jh'y - (m-1)h')}$$

il s'en suit que :

$$\psi_{i,j}(y) = \psi(ih + jh', y)$$

et il suffit de connaître les primitives de $x^k P(x, y)$ pour connaître $w_{i,j}(y)$. Lorsque le polynôme est de degré un, la méthode d'intégration n'est autre que celle du trapèze combinée à la méthode "d'intégration produit" [97] p.135.

- à considérer, ce qui est plus simple et souvent suffisant, que la fonction ne varie pas sur un petit intervalle $[ih + jh', ih + (j+1)h']$ et vaut sa valeur au point $(ih + (j+1/2)h', y)$ où h' fait référence à une subdivision de l'intervalle $[ih, (i+1)h]$ en sous intervalles $[ih + jh', ih + (j+1)h']$, $j \in \{0..m-1\}$, avec $mh' = (i+1)h$. Dans ce cas,

$$l_{i,j}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } ih + jh' \leq x \leq ih + (j+1)h' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d'où

$$\begin{aligned}\psi_{i,j}(y) &= \psi(ih + (j + 1/2)h', y) \quad \text{et} \\ w_{i,j}(y) &= \int_{ih+jh'}^{ih+(j+1)h'} P(x, y) dx.\end{aligned}$$

Cette méthode est dite "du point milieu".

Résolution de l'équation d'Abel par la méthode du point milieu

Nous avons choisi la méthode du point milieu où la partie régulière est approchée par sa valeur prise au centre d'un intervalle de longueur suffisamment petite. Dans le cas de la transformée d'Abel généralisée, la partie singulière est $\frac{1}{\sqrt{y-x}}$ et l'intégrale devient:

$$\begin{aligned}g(nh) &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{ih}^{(i+1)h} \frac{K(x, y)}{\sqrt{y-x}} f(x) dx \quad \text{avec } nh = y \\ &\simeq \sum_{i=0}^{n-1} K(i + \frac{1}{2})h, y) f((i + \frac{1}{2})h) 2\sqrt{h}(\sqrt{n-i} - \sqrt{n-i-1}).\end{aligned}$$

Ainsi, $f(\frac{h}{2})$ est estimée par : $\frac{g(h)}{2K(h/2, h)\sqrt{h}}$. La valeur au pas suivant est calculée connaissant la valeur en $\frac{h}{2}$ et ainsi de suite pour toutes les valeurs de f :

$$f((n - \frac{1}{2})h) = \frac{g(nh) - \sum_{i=0}^{n-2} K((i + \frac{1}{2})h, nh) f((i + \frac{1}{2})h) 2\sqrt{h}(\sqrt{i} - \sqrt{i-1})}{K((n - \frac{1}{2})h, nh) 2\sqrt{h}}.$$

L'opération décrite n'est autre qu'une déconvolution. Aussi, les valeurs du noyau de déconvolution $\sqrt{n-i} - \sqrt{n-i-1}$ pourront être préalablement calculées ce qui diminue le temps de calcul. Cette procédure a été mise en oeuvre de même que celle, plus générale, où le noyau est calculé à chaque itération ce qui permet une partition de l'intervalle $[ih, (i+1)h]$ différente suivant l'itération. Nous donnons en résumé le squelette de l'algorithme pour le calcul de la partie paire d'une fonction radiale du noyau connaissant sa partie impaire. Le noyau de convolution est ici calculé une fois pour toutes.

Algorithme de resolution de l'equation d'Abel:

1. Calcul du noyau de convolution

$maxn \leftarrow 1/h$

Pour i Allant de 1, maxn Faire

$$T_{convol}(i) = 2\sqrt{h}(\sqrt{i} - \sqrt{i-1})$$

Fin pour

2. Calcul de la transformee d'Abel de la fonction impaire : TAG^i

Pour i Allant de 1, maxn Faire

Pour j Allant de 1, i Faire

$$TAG^i(i) \leftarrow TAG^i(i) + f((i - j + \frac{1}{2})h) \mu^{A^i}((i - j + \frac{1}{2})h, ih) T_{convol}(j)$$

Finpour

Finpour

3. Calcul de la composante paire f^p , par la transformée d'Abel inverse de : TAG^i

Pour i Allant de 1, maxn Faire

Pour j Allant de 1, i-1 Faire

$$Som \leftarrow Som + f((i - j - \frac{1}{2})h) \mu^{A^p}((i - j - \frac{1}{2})h, ih) T_{convol}(i + 1)$$

Finpour

$$f_p((i - \frac{1}{2})h) = \frac{-g(ih) - Som}{2\mu^{A^i}((i - \frac{1}{2})h, ih) T_{convol}(1)}$$

Finpour

Dans cet algorithme les fonctions de pondération $\mu(x, y)$ sont supposées ne pas s'annuler sur la diagonale. Dans l'ouvrage [97] est donnée une adaptation de la méthode du trapèze combinée aux méthodes "d'intégration produit". En particulier une manière est présentée d'obtenir la valeur à l'origine requise par cette méthode. De même la méthode dite bloc par bloc est traitée en détail. Celle-ci intervient d'une part dans les méthodes d'intégration d'ordre supérieur pour estimer quelques valeurs initiales de la fonction cherchée. D'autre part, cette méthode permet également la résolution des équations de Volterra. L'idée de la méthode bloc par bloc repose sur l'interpolation quadratique de la fonction [97] p.114,136,168 et passe par la résolution d'un système linéaire.

3.2.2 Méthode Algébrique de Reconstruction de la transformée de Radon

L'analogie développée dans les chapitres précédents entre l'imagerie Doppler et la tomographie nous amène à adapter un code robuste de résolution. Une méthode algébrique de reconstruction pour la résolution du système de quatre transformées de Radon est ainsi présentée succinctement. Nous précisons le critère de régularisation utilisé et la méthode numérique de résolution employée. L'algorithme général est donné en fin de section. Ce code développé par Laurent Desbat [41, 40] est utilisé par ELF en tomographie industrielle et par différents laboratoires de spectrométrie dont celui de Grenoble. Nous avons dû adapter ce programme pour pouvoir d'une part traiter le cas de la transformée de Radon généralisée, d'autre part considérer la transformée de Radon vectorielle.

ART : Algebraic Reconstruction Technique

La méthode ART est souvent associée à la méthode de Kaczmarz's [105]. Ce n'est pas le sens que nous donnons ici à ART. Elle suggère une méthode de reconstruction où les données ainsi que la fonction cherchée sont discrétisées, par opposition aux méthodes algébriques directes. Dans ces dernières, seules les mesures sont discrétisées. La fonction est cherchée dans un espace de Hilbert, typiquement l'espace $L^2(\mathbb{R}^2)$. L'opérateur résulte alors de l'intersection de la fonction avec une indicatrice de bande. La matrice, du fait de l'invariance par rotation, est alors bloc circulante et l'inversion peut être envisagée à l'aide de méthodes de Fourier [105, 104].

Dans ART, la fonction cherchée est écrite sous la forme d'une combinaison linéaire d'un nombre fini de fonctions. Ces dernières sont en général et dans notre cas des indicatrices de pixels. Par ailleurs, la fonction est à support sur deux disques. En effet, nous avons choisi de travailler dans le plan équatorial P_e et la sphère se projette alors sur deux disques. Dans ce qui suit nous adoptons la décomposition de la fonction en ses composantes paire et impaire comme vu dans le chapitre précédent. La matrice G mise en jeu est formée de quatre blocs. Pour chacun des blocs, chaque ligne correspond à l'intersection de la fonction avec la droite sur laquelle elle est intégrée, ceci pondéré par une fonction poids. Une conséquence immédiate est que la matrice est très creuse. En effet une droite rencontre, dans le pire des cas et pour une grille carrée de $n \times n$ pixels, $2n - 1$ pixels. D'un point de vue pratique, deux tableaux de $2m(2n - 1)$ éléments (où m est le nombre de données; le facteur 2 vient du fait que deux disques sont mis en jeu) sont utilisés; l'un sert à indiquer l'autre en faisant référence aux pixels traversés par la droite; le second contient les éléments de la matrice. Chaque élément de la matrice résulte donc de l'intersection d'un pixel avec la fonction, pondéré par les mesures invariantes par rotation. Aussi faut-il, pour chaque direction, calculer les coordonnées des points d'intersection d'une droite avec les points de la grille et non pas se contenter de savoir si tel pixel est ou n'est pas traversé par la droite (comme il était fait dans les premiers algorithmes de tomographie où la longueur d'intercept pour chaque pixel traversé, n'était pas prise en compte).

Régularisation

Une fois la matrice évaluée, le problème régularisé doit être résolu. La régularisation porte ici sur la minimisation du Laplacien, voir fin de la section 3.1.2.

Le critère de choix du paramètre de régularisation est une des données importantes de la théorie de la régularisation. Pour des raisons déjà évoquées dans la section 3.1.4, le critère de validation croisée est souvent judicieux. La difficulté tient au coût d'évaluation de la fonction $VCG(\tau)$ à minimiser. Elle peut cependant être contournée en adoptant dans

un premier temps le critère de validation croisée généralisée [40, 65] :

$$VCG(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{((I - A(\tau))g)_k^2}{\text{tr}(1 - A(\tau))^2},$$

où tr est la trace de la matrice. Rappelons que $A(\tau)$ est telle que $g_\tau = Gf_\tau = A(\tau)g$ d'où :

$$A(\tau) = G(G^*G + \tau\Delta)^{-1}G^*.$$

Ainsi évaluer la fonction $VCG(\tau)$ reste une opération coûteuse dans la mesure où elle passe par le calcul de la trace ce qui requiert l'inversion de la matrice $(G^*G + \tau\Delta)$. Comme il est nécessaire de calculer cette fonction pour plusieurs valeurs de τ afin d'en trouver son minimum, l'utilisation de ce critère est exclu tant que le prix de calcul à payer n'est pas diminué. L'idée proposée par Didier Girard [63, 64] est d'approcher la trace par l'estimateur statistique sans biais :

$$\frac{w^t(w - A(\tau)w)}{w^tw}, \quad (3.6)$$

où $w = (w_1 \dots w_m)^t$ est un bruit Gaussien centré réduit, voir aussi [44]. Il montre que c'est là un très bon estimateur statistique pour n assez grand et ainsi que la complexité de l'algorithme qui en découle est du même ordre que celle de la méthode standard des résidus. Plus précisément, Didier Girard montre que l'estimateur est non seulement sans biais mais également que sa variance est très petite, si bien qu'il ne sera pas nécessaire, pour le calcul de la moyenne, d'évaluer w_τ pour un grand nombre de vecteurs aléatoires. En pratique, si n est assez grand, une seule évaluation est suffisante. L'algorithme est le suivant :

- initialisation d'un vecteur aléatoire de dimension m à partir de la loi normale.
- calcul du résidu, $w - w_\tau$ avec $w_\tau = A(\tau)w$.
- estimation de la trace à partir de ce dernier d'après (3.6).

Il faut noter que le calcul de w_τ (comme celui de $A(\tau)g$ qui intervient au numérateur dans la définition de la fonction de validation croisée) ne nécessite pas l'inversion de la matrice $(G^*G + \tau\Delta)$. En effet, il suffit de résoudre le système linéaire donné par

$$(G^*G + \tau\Delta)x = G^*w$$

d'où est déduit $w_\tau = Gx$. Ainsi, l'évaluation de $VCG(\tau)$ se réduit à la résolution de deux systèmes linéaires, ce qui est réalisé par la méthode du gradient conjugué.

Résolution

Une fois le paramètre de régularisation fixé, il reste à trouver la solution de moindres carrés de moindre norme, c'est à dire la fonction qui minimise :

$$\|Gf - g\|^2 + \tau\|\Delta f\|^2$$

et vérifie ainsi l'équation normale :

$$(G^*G + \tau\Delta)f = G^*g. \quad (3.7)$$

Le système linéaire (3.7) étant défini positif il est naturel d'envisager pour sa résolution la méthode du gradient conjugué. En effet, celle-ci permet de minimiser en n itérations (n étant les dimensions de la matrice $G^*G + \tau\Delta$) une fonction quadratique sur \mathbb{R}^n sans stocker de matrice supplémentaire. À chaque itération, la direction suivante est cherchée dans l'orthogonal de l'espace engendré par les directions précédentes. Ainsi, à chaque itération, cet espace a une dimension supplémentaire. L'algorithme doit donc se terminer en n itérations au plus. Le gradient conjugué est une méthode très économique puisque, d'un point de vue pratique, elle ne nécessite que la mémoire de la direction précédente [19].

Soulignons que dans la pratique, p évaluations de la fonction de validation croisée requièrent $2p$ résolutions du système (3.7). La solution pour la valeur de τ sélectionnée peut avoir déjà été calculée. Nous concluons ici que la complexité de l'algorithme est du même ordre de grandeur que celle liée à la résolution d'un système linéaire de dimension n .

Algorithme

L'algorithme est le suivant :

- 1 Calcul des éléments de la matrice.³
- 2 Calcul du paramètre de régularisation
- 3 Résolution du système linéaire par la méthode du gradient conjugué.

La première opération requiert pour les p directions et les q translations par direction le calcul des points d'intersection de la droite avec les deux grilles de n par n éléments. Comme une droite rencontre au plus $2n - 1$ pixels, le nombre d'opérations élémentaires pour le calcul de la matrice est en $\mathcal{O}(n \times m)$, avec $m = pq$. Le calcul du paramètre de régularisation passe par la résolution d'un système de dimension $(2(2n - 1))^2$, par méthode

3. Dans les options offertes par ce code il est en particulier possible d'introduire dans les données, un bruit Gaussien centré réduit, ce qui peut s'avérer intéressant dans la phase de test de l'algorithme à la sensibilité du bruit de mesure.

de gradient conjugué. Dans le pire des cas, $4n - 2$ itérations sont nécessaires. Chaque itération requiert essentiellement le produit de la matrice par la direction précédente. La complexité est ainsi en $\mathcal{O}(n^3)$ mais en moyenne, peu d'itérations seront nécessaires et le coût sera de l'ordre de n^2 . La dernière étape a même coût que l'opération précédente. La complexité de l'algorithme est donc en $\mathcal{O}(n^2 + mn)$.

3.3 Quelques résultats issus des reconstructions

L'idée est d'étudier la stabilité numérique des reconstructions connaissant, à présent, l'indétermination inhérente à l'existence du noyau. A l'aide des deux codes présentés ci-dessus, quelques simulations numériques vont permettre de caractériser les fonctions du noyau. On s'efforcera de dégager les conséquences de leur existence sur la solution. Dans un deuxième temps, nous donnerons une idée de la sensibilité de la reconstruction aux erreurs de mesure et d'estimation des paramètres d'entrée qui sont évalués à partir d'autres techniques d'observation.

3.3.1 Caractérisation des fonctions radiales

Dans cette section, nous illustrons par quelques exemples l'ensemble des fonctions radiales du noyau et tentons d'analyser leur influence dans la reconstruction. Au chapitre précédent nous avons vu que les fonctions radiales appartiennent au noyau des opérateurs M^p , M^i et par conséquent, l'espace de fonctions :

$$\mathcal{F}_r = \{f = (f^p, f^i)^t \in (L^2(D))^2 \mid f(x) = f(\|x\|) \text{ et } f^p = -A^{p-1} A^i f^i\}$$

appartient au noyau de l'opérateur.

Comme au chapitre précédent, nous considérons le modèle simple où seule intervient la géométrie. Ensuite les fonctions d'assombrissement centre-bord et de projection du vecteur intensité sur la ligne de visée sont prises en compte via les fonctions de pondération μ .

Fonctions poids réduites aux indicatrices de la partie visible

Lorsque les fonctions poids sont réduites aux indicatrices d'ellipses, l'opérateur A^p est la transformée d'Abel simple et l'opérateur A^i la transformée d'Abel pondérée par l'indicatrice d'ellipse :

$$\forall y \in [0, 1], a(\omega, \sqrt{1-y}) = 2 \int_0^y \frac{f^p(\sqrt{1-x})}{\sqrt{y-x}} dx + 2 \int_{(1-c^2)y}^y \frac{f^i(\sqrt{1-x})}{\sqrt{y-x}} dx \quad (3.8)$$

Rappelons que le paramètre c n'est fonction que de l'angle d'inclinaison de l'étoile et vaut $c = \cos \alpha$. Ainsi, connaissant f^i , il est possible de donner une expression analytique

de f^p telle que la mesure $a(\omega, \sqrt{1-y})$ de la fonction $f = (f^p, f^i)^t$ soit nulle, voir équation (3.4). L'algorithme d'Abel donné précédemment a été adapté pour tenir compte de l'indicatrice : les intervalles $[(1-c^2)y, y]$ sont partitionnés en sous-intervalles de longueur constante, quel que soit y . Il suffit ainsi de calculer une fois pour toutes le noyau par lequel la fonction impaire est convoluée. Nous illustrons ci après, par quelques exemples, l'ensemble des fonctions radiales du noyau.

Notations : rappelons ici que la distribution sur la sphère n'est pas la même que celle dans le plan équatorial, P_e . Pour passer de la première à la seconde il faut multiplier par le Jacobien, voir équation (2.4) : $\forall r\omega \in D, J(r\omega) = \sqrt{1-r^2}$. Comme dans le chapitre précédent, la fonction sur la sphère est notée $f_s(\zeta)$ tandis qu'elle est notée $f(x)$ lorsqu'il s'agit de sa projection sur P_e . Les fonctions qui interviennent dans cette section sont radiales et ne dépendent donc que de la norme du vecteur x . Aussi par abus sont-elles notées $f(r) \forall r \in [0, 1]$ et $f_s(r)$ où $r = \|x\|$. Il s'agit en fait du coefficient de la première harmonique de la fonction. Pour une expression classique des équations de Volterra nous avons été amenés précédemment à écrire ce coefficient sous la forme $f_0(\sqrt{1-x})$. Ainsi dans ce qui suit, $x(=1-r^2) \in [0, 1]$. D'autre part la fonction est notée f^\pm ou $f^{p/i}$ suivant qu'elle est donnée dans la décomposition nord-sud ou paire-impair. Enfin rappelons que $a(\omega, s) = g(\omega, s) + g(-\omega, -s)$ est obtenu en ajoutant des observations déphasées de π . La mesure de fonctions radiales ne dépendant pas de la phase, il peut être plus intéressant de donner celle obtenue à chaque date, $g(\omega, s) = \frac{1}{2}a(\omega, s)$.

Fonctions constantes sur la sphère

Soit la composante impaire suivante d'une fonction :

$$f^i(r) = \frac{F^i}{\sqrt{1-r^2}}, \text{ ou de manière équivalente } f^i(\sqrt{1-x}) = \frac{F^i}{\sqrt{x}}.$$

Cette fonction est régulière dans le plan équatorial et correspond à la fonction constante sur la sphère. L'expression analytique de son image par l'opérateur A^i est :

$$\begin{aligned} A^i f^i(y) &= F^i \int_{(1-c^2)y}^y \frac{1}{\sqrt{x(y-x)}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1-2c^2}{2c\sqrt{1-c^2}} = \pi - 2\alpha. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'image par l'opérateur A^p de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est également une constante et vaut π . Ainsi la fonction $f(r) = (\frac{F^p}{\sqrt{x}}, \frac{F^i}{\sqrt{x}})^t$ a pour mesure :

$$g(\omega, \sqrt{1-y}) = \pi F^p + (\pi - 2\alpha) F^i. \quad (3.9)$$

Il s'ensuit que la partie paire solution de l'équation (3.8) sans second membre est :

$$f^p(\sqrt{1-x}) = (-1 + \frac{2\alpha}{\pi}) \frac{F^i}{\sqrt{x}}.$$

Il existe donc des fonctions du noyau constantes sur chacun des hémisphères. Ces fonctions sont :

$$f_s^\pm(r) = (\frac{2\alpha}{\pi}, -2 + \frac{2\alpha}{\pi})^t F^i. \quad (3.10)$$

Remarquons que la deuxième composante est strictement négative.

Quelles sont les conséquences de l'existence de ces fonctions :

- la non-unicité n'est pas sans rappeler l'ambiguïté nord-sud propre au cas d'inclinaison perpendiculaire des axes de visée et de rotation. En effet un point et son symétrique par rapport à l'équateur se trouvent alors sur la même courbe d'iso-vitesse quelle que soit la phase et par conséquent, l'effet de l'un sur les mesures ne peut être distingué de l'effet de l'autre. En d'autres termes, dans le cas des fonctions constantes sur chaque hémisphère, les fonctions impaires $f^\pm(r) = (F^i, -F^i)^t$ sont "invisibles", voir équation (3.10) pour $\alpha = \pi/2$. De manière plus générale, à 90° , toute fonction impaire appartient au noyau. Ainsi les deux distributions suivantes :

$$f_s^\pm(r) = (1, 1)^t \text{ et } f_s^\pm(r) = (2, 0)^t,$$

donnent le même signal. Bien entendu le flux intégré à chaque phase sur l'hémisphère visible est identique pour ces deux distributions et vaut 2π pour un rayon unitaire de la sphère.

Les fonctions radiales du noyau étendent en quelque sorte cette ambiguïté à tous les angles d'inclinaison. En effet l'existence des fonctions du noyau, voir équation (3.10), signifie entre autre que les deux configurations suivantes :

$$f_s^\pm(r) = (2(1 - \frac{\alpha}{\pi}), 2(1 - \frac{\alpha}{\pi}))^t \text{ et } f_s^\pm(r) = (2, 0)^t$$

donnent la même mesure :

$$g(\omega, s) = 2(\pi - \alpha), \text{ voir équation (3.9).}$$

De même que pour $\alpha = 90^\circ$, le flux est le même d'une solution à l'autre, le flux sur la partie visible, qui n'est autre que l'intégrale de $g(\omega, s)$ pour $0 \leq s \leq 1$, est identique pour des distributions donnant le même spectre. Dans le cas des fonctions constantes sur chaque hémisphère il vaut $2(\pi - \alpha)F^+ + 2\alpha F^-$. Dans l'exemple précédent le flux reçu vaut $4(\pi - \alpha)$, à chaque observation et quelle que soit la distribution. Alors

que le flux intégré sur la sphère entière dépend de la distribution, le flux intégré sur la partie visible n'en dépend pas. C'est ce dernier qui peut être obtenu par la première harmonique. En termes plus physiques ceci traduit le fait que seule la magnitude visuelle et non intrinsèque de l'étoile peut être déduite. Ceci signifie également que des données photométriques (mesure du flux dans différents filtres) ne permettront pas, comme dans le cas d'inclinaison à angle droit, de lever l'ambiguïté. Cependant, pour des petits angles d'inclinaison, l'existence des fonctions du noyau est pratiquement sans conséquence sur l'identifiabilité de la solution du fait que la composante nord est proportionnelle à l'angle d'inclinaison. En effet, il suffit de constater que d'après l'équation (3.10), la valeur prise par la fonction du noyau sur l'hémisphère nord est négligeable devant la composante sud (pour $\alpha \sim 0$, $-2 \gg 2\alpha/\pi$). Comme par ailleurs dans l'hémisphère sud la plupart des points, pour ces angles d'inclinaison, ne sont jamais visibles, on en conclut que les fonctions du noyau pour les petits angles ne donnent lieu à des difficultés de reconstruction que pour un ensemble négligeable de points situés vers l'équateur.

En résumé, les fonctions du noyau se comprennent, comme à 90° , en termes d'ambiguïté nord-sud : seule la valeur intégrée du flux sur la demi-sphère visible est identifiable et non la valeur sur chacun des hémisphères. Pour des petits angles d'inclinaison, le noyau affecte peu la reconstruction.

- les fonctions du noyau constantes sur chaque hémisphère présentent une discontinuité au niveau de l'équateur, voir équation (3.10), ce qui peut ne pas être physiquement acceptable. D'autre part, l'inverse généralisé, c'est à dire la solution unique de moindres carrés de moindre norme, appartient à l'orthogonal du noyau de l'opérateur et ainsi les fonctions du noyau ne sont pas "ajoutées" à la solution. Ainsi, si la fonction de départ est continue, la solution ne deviendrait pas discontinue à cause de fonctions non-continues du noyau. Par ailleurs les critères de régularisation par maximum d'entropie ou minimisation du gradient tendent à sélectionner l'image la plus régulière possible et contribuent ainsi à éliminer de la solution toute fonction qui présente des sauts de discontinuité. Ainsi, si la fonction de départ est non-continue, la solution peut très bien être continue.
- la solution ne peut être trouvée qu'à une constante près sur chaque hémisphère. Ceci n'est pas trop grave tant que l'intérêt de l'imagerie Doppler porte sur la reconstruction de taches, c'est à dire des irrégularités de surface.
- Notons que la valeur moyenne du flux peut être déduite d'autres mesures physiques : le type spectral d'une étoile établi d'après l'analyse de son spectre (c'est à dire d'après les éléments constitutants de l'objet) permet en effet de trouver la température effective (la température du corps noir qui donnerait le même spectre).

Indicatrices de bandes latitudinales

Les indicatrices de bandes latitudinales, c'est à dire les fonctions nulles en dehors d'une région située entre deux latitudes données, sont intéressantes à étudier pour la raison suivante : plusieurs auteurs suggèrent l'existence de régions froides couvrant toute une bande en latitude [36, 87, 53, 132, 135]. Cette information est précieuse parce qu'elle permet de valider des modèles en amont (modèles d'évolution stellaire...) qui rendent compte de la géométrie du champ magnétique, lequel est étroitement lié aux régions froides. Nous reviendrons là-dessus dans la deuxième partie. Dans cette perspective, la validité de telles structures reconstruites est essentielle. Nous présentons quelques-unes de ces fonctions du noyau et discutons de leurs conséquences dans les reconstructions.

La composante impaire de la fonction étant donnée, la partie paire vérifiant l'équation (3.8) du noyau $a(\omega, \sqrt{1-y}) = 0$ est déduite. Trois cas sont à distinguer suivant que les latitudes marquant la frontière de l'indicatrice sont supérieures ou inférieures à l'angle d'inclinaison de l'étoile. Ceci tient au fait que les régions de l'hémisphère sud situées à des latitudes inférieures à l'angle d'inclinaison ne sont jamais visibles, voir section 1.2.3. À titre d'exemple, l'angle d'inclinaison de l'étoile est fixé à $\alpha = 30^\circ$. Ainsi les fonctions $f^\pm(r)$ dont la composante nord est nulle et dont la composante sud a son support inclus dans le disque de rayon $c = \cos \alpha = \sqrt{3}/2$, appartiennent au noyau. L'indicatrice de bande est notée :

$$\chi_{[a,b]}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Indicatrices incluses dans le cercle de rayon c

Par exemple, soit la fonction impaire :

$$f^i(\sqrt{1-x}) = \chi_{[0.6, 0.8]}(x), \text{ soit } f^i(r) = \chi_{[\sqrt{0.2}, \sqrt{0.4}]}(r),$$

tout entière contenue dans le disque de rayon c . Comme remarqué en conclusion de la section 2.2.2, la partie paire $f^p = -f^i$ vérifie la condition d'appartenance de la fonction au noyau. Il s'agit du cas simple où la fonction a son support dans la partie invisible. Ces fonctions offrent donc un intérêt limité. Elles ne sont pas particulièrement difficiles à inverser dans la mesure où elles n'affectent que la partie non visible de l'étoile pour laquelle aucune information n'est cherchée.

2. Indicatrices dont une partie seulement est incluse dans le cercle de rayon c

Soit la composante impaire suivante :

$$f^i(\sqrt{1-x}) = \chi_{[0.2, 0.4]}(x), \text{ soit } f^i(r) = \chi_{[\sqrt{0.6}, \sqrt{0.8}]}(r),$$

Une partie de l'anneau appartient à la région “jamais visible”. D'après l'équation (3.8), l'expression de son image par A^i est :

$$A^i f^i(\sqrt{1-y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y \leq 0.2 \\ 2\sqrt{y-0.2} & \text{si } 0.2 \leq y \leq 0.4 \\ 2\sqrt{y-0.2} - 2\sqrt{y-0.4} & \text{si } 0.4 \leq y \leq 0.8 \\ \sqrt{3y} - 2\sqrt{y-0.4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La composante paire telle que la fonction appartienne au noyau s'en déduit, voir fig. 3.1 de gauche :

$$f^p(\sqrt{1-x}) = -\chi_{[0.2,0.4]}(x) + \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{-\sqrt{3y+2.4} + 2\sqrt{y+0.6}}{\sqrt{x-y}} dy \chi_{[0.8,1]}(x).$$

On constate d'abord que la solution du noyau affecte essentiellement les régions de hautes latitudes ($r \simeq 0$). A l'exclusion de la bande latitudinale de l'hémisphère sud qui s'étend de $\theta_r = \arccos \sqrt{0.6} = 27^\circ$ à $\theta_r = \arccos \sqrt{0.6} = 8 = 40^\circ$, la fonction du noyau atteint son maximum aux pôles ($r = 0$) où elle vaut :

$$f^p(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3y+2.4}} + \frac{1}{y+0.6} \right) \frac{1}{1-x} dx \simeq 0.11.$$

A noter que la fonction réduite aux latitudes supérieures ($\theta_r > 40^\circ$) est symétrique par rapport à l'équateur. Elle diminue lentement avec la latitude jusqu'à s'annuler en $\theta_r = \arccos \sqrt{0.2} \simeq 63^\circ$. Cependant, la valeur prise par la fonction dans la région des pôles est négligeable par rapport à celle prise sur la bande latitudinale de l'hémisphère sud. Enfin remarquons que, sur la sphère, la configuration est plus régulière (atténuation en $\sqrt{1-r^2}$). De cet exemple il faut retenir qu'on ne pourra reconstruire des structures en anneaux de l'hémisphère sud qui se situeraient à des latitudes voisines de l'angle d'inclinaison.

3. Indicatrices à l'extérieur du cercle de rayon c

Le dernier cas concerne une indicatrice de bande tout entière comprise à l'extérieur du disque de rayon c c'est-à-dire un anneau latitudinal à une latitude inférieure à 30° dont tout point est ainsi visible à une phase au moins de la rotation. Soit la composante impaire :

$$f^i(\sqrt{1-x}) = \chi_{[0.1,0.2]}(x),$$

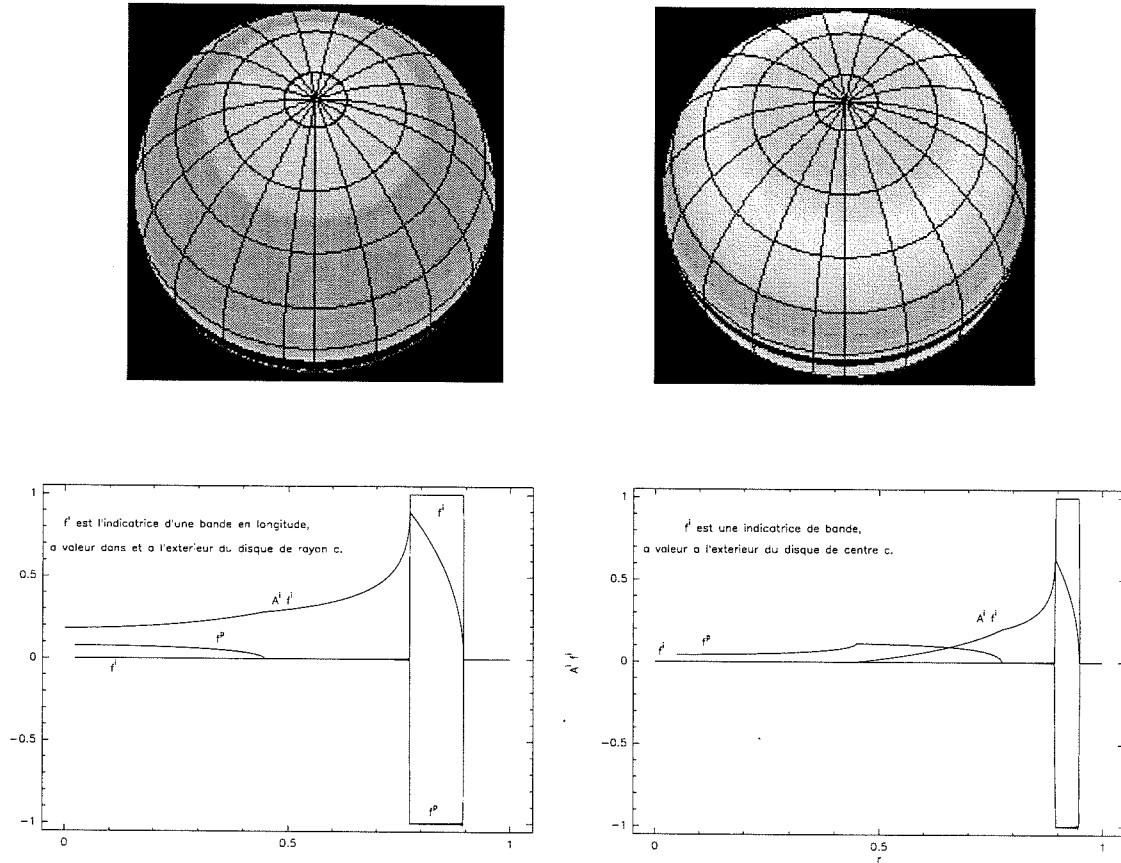


FIG. 3.1 – Fonctions du noyau dont la composante impaire est nulle en dehors d'une région comprise entre deux latitudes. En haut est représentée sur la sphère pour les cas 2 et 3, une fonction du noyau dominée par un anneau plus ou moins visible de l'hémisphère sud. L'angle d'inclinaison est de 30° . Sur l'image de gauche, une partie de l'indicatrice de bande n'est jamais visible tandis que sur l'image de droite, l'indicatrice est toute entière visible à un moment de la rotation. Ces deux exemples illustrent l'impossibilité à reconstruire des régions froides de l'hémisphère sud qui se répartiraient sur un anneau à des latitudes voisines de l'angle d'inclinaison de l'étoile. En bas sont représentés dans chacun des cas 2 et 3, les composantes paire et impaire de la fonction du noyau dans P_e . La mesure de la partie impaire est également donnée. La fonction du noyau est négligeable sur l'hémisphère nord devant l'indicatrice de bande ($f^p(r)$ est négligeable sauf dans l'indicatrice de bande).

dont la mesure par l'opérateur A^i est

$$A^i f^i(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y \leq 0.1 \\ 2\sqrt{y-0.1} & \text{si } 0.1 \leq y \leq 0.2 \\ 2\sqrt{y-0.1} - 2\sqrt{y-0.2} & \text{si } 0.2 \leq y \leq 0.4 \\ \sqrt{3y} - 2\sqrt{y-0.2} & \text{si } 0.4 \leq y \leq 0.8 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La solution de l'équation sans second membre (3.8) est similaire à celle obtenue dans le cas précédent. La différence essentielle tient à l'étendue de la région pour laquelle la solution du noyau est non nulle, voir Fig. 3.1 de droite. En effet si la fraction non nulle et visible de la composante impaire augmente, il faut réciproquement augmenter la fraction pour laquelle la partie paire est non nulle. Comme dans le cas précédent, la fonction est négligeable en dehors de l'indicatrice $\chi_{[0.1,0.2]}(x)$ de l'hémisphère sud. Pour les valeurs de $x > 0.2$, la valeur maximale est atteinte au point $x = 0.8$ et vaut :

$$f^p(\sqrt{0.2}) = \int_0^{0.8} \left(\frac{-3}{2\sqrt{3y+1.2}} + 2\frac{1}{\sqrt{y+0.3}} \right) \frac{1}{\sqrt{0.8-y}} dy \simeq 0.12$$

L'exemple montre là aussi, aux approximations du modèle près, la difficulté à identifier des configurations en anneaux de l'hémisphère sud, même si tout point de cette bande latitudinale est visible à un instant de la rotation.

Fonctions régulières sur la sphère

Dans le cas d'une distribution constante sur la sphère, les fonctions du noyau étaient régulières mais présentaient un saut de discontinuité au niveau de l'équateur. L'exemple qui suit se veut une illustration de fonctions continues et régulières sur toute la sphère. L'utilisation de la technique de cartographie de la surface des étoiles par imagerie Doppler aurait été plus favorable si les fonctions du noyau étaient, par exemple, très oscillantes et par là, physiquement non acceptables. Des fonctions continues partout, régulières et à décroissance lente, sont données.

Soit la partie impaire constante valant F^i sur tout le disque. De l'équation (3.8) se déduit très facilement la fonction du noyau, $f^{p/i}(r) = (-cF^i, F^i)^t$. La figure 3.2 montre la distribution correspondante sur la sphère.

Ainsi la fonction :

$$f^\pm(r) = \left(\frac{-cF^i + F^i}{2}, \frac{-cF^i - F^i}{2} \right)^t$$

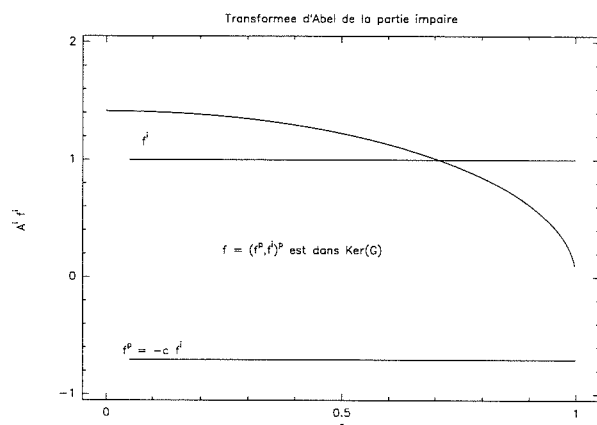
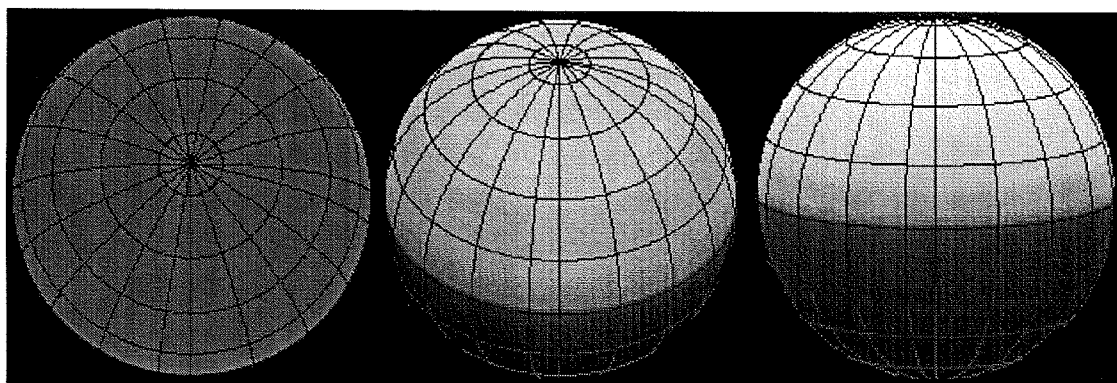


FIG. 3.2 – En haut sont représentées des fonctions du noyau pour des angles d'inclinaison (de gauche à droite) de 10, 30 et 80°. La couleur au niveau de l'équateur correspond à la valeur nulle. Le contraste entre le pôle et l'équateur augmente avec l'angle d'inclinaison. L'image de droite illustre un cas proche de l'ambiguïté nord-sud.

Ci-dessus est représentée la transformée d'Abel de la composante constante impaire $f^i(r) = 1$ (d'où $A^i f^i = 2c\sqrt{1-r^2}$) et $f^p(r) = -c$ avec $c = \cos \alpha$. L'angle d'inclinaison choisi est de 45°. La fonction $f(r) = (-c, 1)^t$ appartient ainsi au noyau de l'opérateur.

appartient au noyau et par conséquent les deux distributions suivantes :

$$f^\pm(r) = (1+c, 1+c)^t \text{ et } f^\pm(r) = (2, 0)^t, \quad (3.11)$$

donnent le même signal. Dans ce cas très simple, la transformée de Radon est :

$$\begin{aligned} a(\omega, s) &= 4F^p \sqrt{1-s^2} + 4cF^i \sqrt{1-s^2} \\ &= 4(1+c)F^+ \sqrt{1-s^2} + 4(1-c)F^- \sqrt{1-s^2}, \end{aligned}$$

où F^+ et F^- désignent les valeurs prises sur les hémisphères respectivement nord et sud. Ainsi pour n'importe laquelle des deux distributions (3.11), le signal vaut :

$$g(\omega, s) = 4\sqrt{1-s^2}(1+c).$$

Pour de petits angles d'inclinaison, la fonction est négligeable dans l'hémisphère nord (car proportionnelle à $1 - c$ avec $c \sim 1$) et maximale dans l'hémisphère sud. Comme d'une part, sur ce dernier, seuls les points compris entre l'équateur et la latitude α sont visibles et que, d'autre part, la fonction du noyau est presque nulle autour de l'équateur (atténuation en $\sqrt{1 - r^2}$), ces fonctions sont sans conséquences graves sur le problème d'inversion.

Lorsque l'angle augmente, la fonction du noyau n'est plus négligeable et conduit à l'ambiguïté nord-sud. Dans l'hémisphère nord la fonction est maximale pour $\alpha = 90^\circ$ et vaut alors :

$$f_s^\pm(\sqrt{1 - r^2}, -\sqrt{1 - r^2})^t.$$

L'ambiguïté nord-sud traduit par exemple l'impossibilité à distinguer la fonction régulière qui se comporterait comme le sinus de la latitude, $f_s^\pm(r) = (\sqrt{1 - r^2}, \sqrt{1 - r^2})^t$, de celle qui vaudrait $f_s^\pm(r) = (2\sqrt{1 - r^2}, 0)^t$. La fonction intégrée le long des courbes d'iso-vitesse sur la partie visible est identique quelque soit la distribution. Aux angles intermédiaires, l'ambiguïté nord-sud existe aussi.

En conclusion, en rappelant que ces résultats sont issus d'un modèle théorique où seule est prise en compte la géométrie, une configuration de la surface de l'étoile selon laquelle la température augmenterait avec le sinus de la latitude ne pourrait être reconstruite pour des larges angles d'inclinaison. Cet exemple illustre le cas de fonctions régulières, continues du noyau (la fonction est en fait C^∞ par morceaux et C^0).

Si l'intérêt de l'imagerie Doppler porte sur la reconstruction de structures "locales", ces fonctions régulières n'affecteront pas trop la solution. En d'autres termes, l'analyse de la solution est fiable si celle-ci porte sur les harmoniques d'ordre supérieur à zéro.

Assombrissement centre-bord et fonction de projection

Dans ce paragraphe, les fonctions d'assombrissement centre-bord et de projection sont ajoutées aux indicatrices d'ellipses. La première apporte une correction d'atténuation pour prendre en compte la dépendance de la profondeur optique avec la composante d'un point sur l'axe de visée. Cette loi est empirique et vient de l'étude du disque solaire. La seconde est la projection du vecteur d'intensité lumineuse sur l'axe de l'observateur. On étudiera l'influence de ces deux poids sur les fonctions radiales du noyau. La transformée d'Abel considérée est :

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, 1], \quad a(\omega, \sqrt{1 - y}) &= 2 \int_0^y f^p(\sqrt{1 - x}) \frac{\mu^{Ap}(\sqrt{1 - y}, \sqrt{y - x})}{\sqrt{y - x}} dx + \\ &2 \int_{(1-c^2)y}^y f^i(\sqrt{1 - x}) \frac{\mu^{Ai}(\sqrt{1 - y}, \sqrt{y - x})}{\sqrt{y - x}} dx, \quad (3.12) \end{aligned}$$

où les fonctions poids μ^{Ap} et μ^{Ai} sont données dans la section 2.2.3. Deux exemples sont considérés, l'un concernant le cas de fonctions régulières sur la sphère l'autre celui

d'indicatrices de bandes.

Fonctions régulières sur la sphère

Si la composante impaire est constante sur le disque, alors la partie paire telle que $f = (f^p, f^i)^t$ vérifie dans (3.12) l'équation du noyau $a(\omega, \sqrt{1-y}) = 0$, est également constante. En effet, il suffit de remarquer que les primitives des fonctions $\frac{\mu^{Ap}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x})}{\sqrt{y-x}}$ et $\frac{\mu^{Ai}(\sqrt{1-y}, \sqrt{y-x})}{\sqrt{y-x}}$ sont toutes deux formées de termes en y et $y^{3/2}$. Les constantes du noyau $f^\pm(r)$ sont représentées sur la figure 3.3 pour différents angles d'inclinaison et différentes valeurs du coefficient d'assombrissement centre-bord. La solution est donc continue sur la sphère.

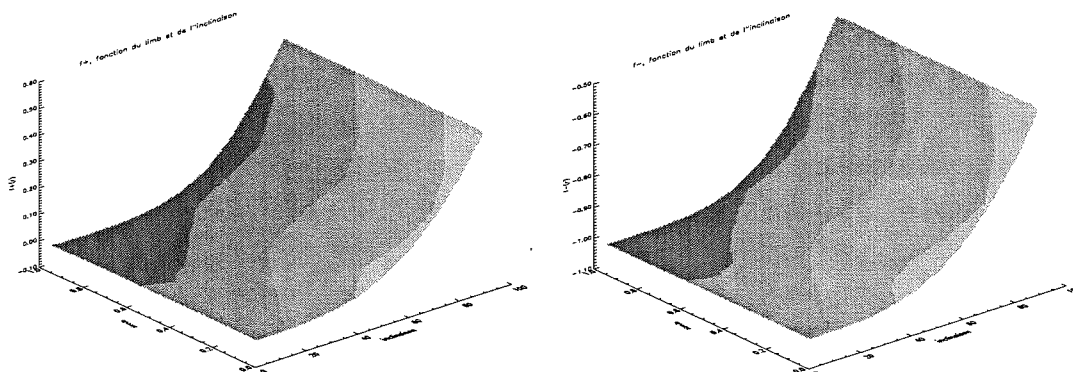


FIG. 3.3 – Des fonctions constantes sur le disque (à gauche la composante nord f^+ , à droite la composante sud f^-) appartenant au noyau sont représentées pour différents angles d'inclinaison et différentes valeurs de l'assombrissement centre-bord.

Les valeurs prises par la fonction sur la partie visible augmentent avec l'angle d'inclinaison ce qui signifie que l'ambiguïté nord-sud augmente d'autant. A une augmentation du coefficient d'assombrissement centre-bord correspond une atténuation plus importante : la loi qui est en $\cos \theta_o$ pour $\epsilon = 0$ devient une fonction de $\cos^2 \theta_o$. Ces fonctions du noyau sont négligeables pour des angles inférieurs à 60° . En effet, les valeurs prises sur l'hémisphère nord pour $f^i = 1$ sont inférieures à 0.07 quelque soit la valeur du limbe. Les valeurs prises sur l'hémisphère sud sont plus importantes. Cependant d'une part, une grande partie de cet hémisphère est toujours invisible et d'autre part la partie toujours visible est celle proche de l'équateur où la fonction, sur la sphère, décroît en $\sqrt{1-r^2}$ avec $r \sim 1$. L'influence du limbe est maximale autour de $\alpha = 60^\circ$: la valeur prise par la composante

nord sur le disque diminue de 30% lorsque le coefficient d'assombrissement passe de zéro à un. Enfin, l'ambiguïté nord-sud domine quelque soit la valeur du limbe pour des angles proches de 90° . En effet, le poids de l'opérateur A^i devient négligeable (proportionnel à $\cos \alpha$) et ainsi la composante paire de la fonction du noyau est négligeable devant la composante impaire.

Indicatrices de bandes

Les fonctions du noyau dont la partie impaire est l'indicatrice de bande : $f^i(\sqrt{1-x}) = \chi_{[0.2,0.4]}(x)$ sont étudiées en fonction de l'inclinaison et du limbe. L'indicatrice est celle d'une bande s'étendant entre les latitudes $\arccos \sqrt{0.8} = 27^\circ$ et $\arccos \sqrt{0.6} = 40^\circ$, ce qui signifie que, pour des angles d'inclinaison inférieurs à 27° , cette bande appartient à la région invisible de l'hémisphère sud. Sur la figure 3.4 sont représentées les composantes sud (à droite) et nord (à gauche) des fonctions radiales $f^\pm(r)$ du noyau pour différents angles d'inclinaison et les deux valeurs extrêmes du coefficient d'assombrissement centre-bord.

Pour des angles d'inclinaison inférieurs à 50° et une valeur nulle du limbe ou pour des angles inférieurs à 60° et une valeur maximale du limbe, la composante nord de la fonction est peu différente de la fonction nulle. En effet, pour des angles inférieurs à 27° , l'indicatrice choisie est toute entière contenue dans l'ellipse. Comme les opérateurs A^p et A^i ont même expression dans l'ellipse, il s'ensuit que la partie paire est égale à l'opposé de la partie impaire. La fonction est donc nulle sur l'hémisphère nord. Dans l'hémisphère sud, elle est réduite à l'indicatrice $\chi_{[0.2,0.4]}(x)$ toute entière contenue dans la région toujours invisible.

Pour des angles d'inclinaison, $27^\circ \leq \alpha \leq 50^\circ$, la partie non commune de deux opérateurs est négligeable devant la partie commune. Les opérateurs sont donc semblables et la conclusion est la même que la précédente. Dans l'hémisphère sud, la fonction est peu différente de l'indicatrice qui, cette fois, est visible à certaines phases de la rotation de l'étoile. Ceci signifie qu'on ne peut reconstruire avec fiabilité des structures en anneaux situées à des latitudes proches de α , et s'explique par le simple fait que ces régions sont visibles pendant une durée très brève de la rotation de l'étoile.

Au delà l'inclinaison est telle que l'effet d'ambiguïté nord-sud, déjà discuté dans les paragraphes précédents, se fait sentir fortement. Il est à remarquer que le coefficient d'assombrissement centre-bord atténue les valeurs prises par les fonctions du noyau et tend également à les rendre plus régulières ce qui n'est pas forcément un avantage (voir remarque sur les fonctions régulières de la sphère).

Sur la figure 3.5 est représentée à titre d'exemple, une de ces fonctions sur la sphère. L'inclinaison choisie est de 65° . Pour des latitudes supérieures à 40° , la fonction du

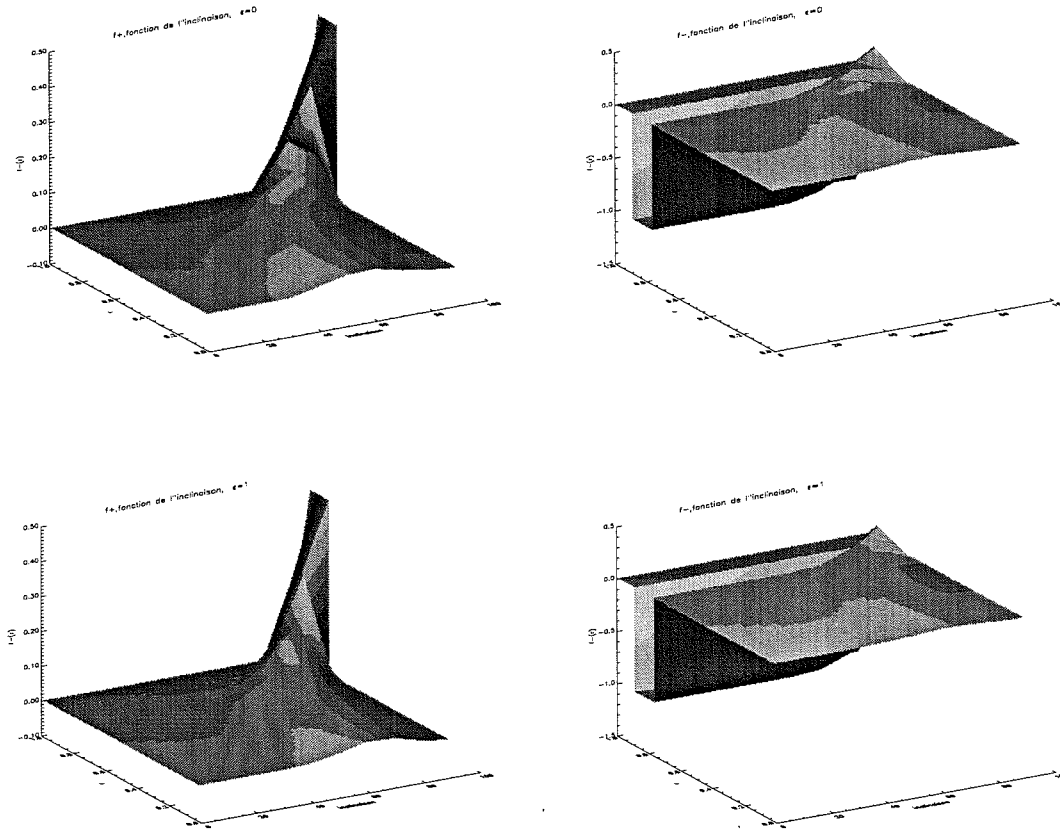


FIG. 3.4 – Des fonctions du noyau dont la partie impaire est, sur le disque, l'indicatrice $f^i(\sqrt{1-x}) = \chi_{[0.2,0.4]}(x)$ sont représentées pour différentes inclinaisons et les deux valeurs extrêmes du limbe : à droite la composante nord, à gauche la composante sud, en haut l'assombrissement centre-bord vaut $\epsilon = 0$, en bas $\epsilon = 1$. La composante nord est voisine de la fonction nulle pour des angles d'inclinaison inférieurs à 60° . L'ambiguïté nord-sud apparaît clairement au delà au niveau de l'indicatrice de bande (valeurs dans l'hémisphère nord opposées à celles dans l'hémisphère sud). Les fonctions sont plus régulières pour une valeur maximale du limbe.

noyau est symétrique par rapport à l'équateur mais les valeurs prises dans cette région sont nettement inférieures à celles prises dans la bande s'étendant des latitudes 27° à 40° où se fait sentir l'ambiguïté nord-sud (valeurs opposées dans les deux l'hémisphères). La fonction du noyau obtenue pour une valeur du limbe maximale est nettement moins contrastée que celle obtenue dans le cas d'un coefficient d'assombrissement centre-bord nul.

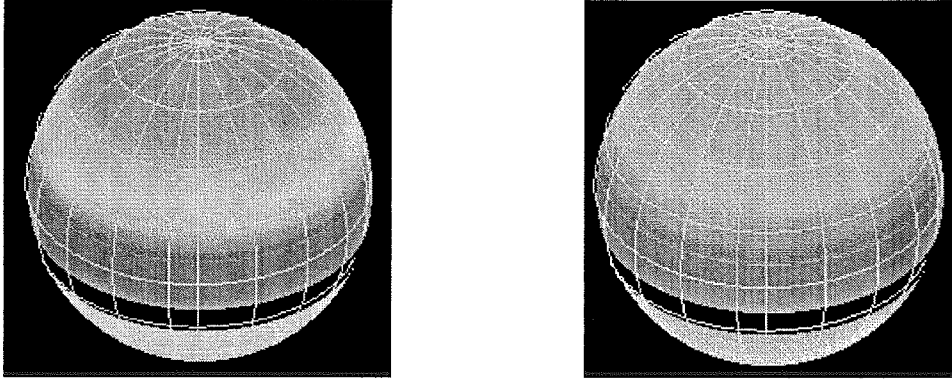


FIG. 3.5 – La fonction du noyau correspondant aux cas de la figure 3.4 lorsque l'inclinaison est de 65° est représentée pour les deux valeurs extrêmes du coefficient d'assombrissement centre-bord : à gauche, $\epsilon = 0$, à droite $\epsilon = 1$. L'ambiguïté nord-sud existe et est plus marquée pour une valeur nulle du limbe. En effet, la fonction est négligeable dans les régions autres que celle qui s'étend des latitudes 27° à 40° . Dans celle-ci, la valeur dans l'hémisphère nord est presque l'opposée de celle de l'hémisphère sud.

3.3.2 Quelques résultats sur l'analyse de la stabilité

Dans cette dernière partie, la stabilité de la reconstruction aussi bien aux erreurs d'estimation des différents paramètres physiques qu'aux conditions observationnelles plus ou moins favorables est analysée à l'aide du code ART. La solution est reconstruite dans le plan équatorial. Pour toutes ces simulations, la fonction est échantillonnée sur une grille carrée de 65 par 65 pixels.

Sensibilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation des paramètres physiques

Tout modèle en imagerie Doppler demande que soient connus certains paramètres intrinsèques à l'objet observé (angle d'inclinaison, période, rayon, masse, vitesse de micro-turbulence, limbe, température effective de la photosphère, gravité...). Nous ne nous intéressons ici qu'à ceux influant sur la géométrie de la mesure : l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation sur l'axe de visée et la période de rotation de l'étoile. La période est en règle générale déduite d'observations photométriques : le flux total sur la demi-sphère visible est mesuré durant une rotation de l'étoile. Une modulation d'amplitude est enregistrée si une région de température différente de la température photosphérique est visible à certaines phases de la rotation. La courbe obtenue est ainsi périodique, de période celle de l'étoile. Par ailleurs, la spectroscopie permet d'accéder au décalage Doppler maximal : $vsini$ (dans

nos notations il s'agit de $\Omega R \sin \alpha$). Connaissant le rayon de l'étoile, l'inclinaison peut être déduite. Ainsi deux cas de figures peuvent se présenter : la plupart du temps, le $vsini$ est assez bien connu. Il n'en est pas de même de la période et par conséquent, de l'angle d'inclinaison. Il se peut également que la période soit estimée correctement mais que le rayon soit mal déterminé auquel cas l'angle ne sera pas connu avec précision⁴

Sensibilité aux erreurs d'inclinaison

Une erreur sur l'angle entre les axes de rotation et de visée semble introduire essentiellement une erreur sur les valeurs de la solution sans nécessairement modifier la localisation des structures cherchées. Deux exemples où sont cherchées des positions de taches viennent illustrer cette hypothèse à laquelle nous tenterons de donner une explication. Ces exemples correspondent à deux positions distinctes de la tache. En effet, de l'inclinaison dépendent trois ensembles de points : l'ensemble des points toujours visibles, l'ensemble des points jamais visibles et enfin l'ensemble des points visibles à certaines phases de la rotation. L'erreur n'est pas la même suivant la région concernée. Soulignons que l'angle d'inclinaison intervient également dans l'expression du décalage Doppler, voir équation (1.1). Cependant, il suffit d'avoir accès au $vsini$ (grandeur en principe bien connue) pour déterminer le décalage.

Dans le premier exemple, une tache d'un rayon de 10° localisée sur le parallèle 55.5° de l'hémisphère nord est cherchée, voir Fig. 3.6 en haut à gauche. Un jeu de données pour une inclinaison $\alpha = 30^\circ$ et pour les deux valeurs extrêmes du coefficient d'assombrissement centre-bord sont simulés, voir Fig. 3.6 en haut à droite. A partir de ces deux jeux de données, l'erreur faite lorsque l'angle est mal estimé est déduite. La position de la tache est correctement reconstruite mais la tache tend à être plus ou moins étendue et le contraste avec la région avoisinante plus ou moins marqué. Sur la figure 3.6 en bas nous avons représenté, en fonction de l'erreur $\Delta\alpha = \alpha^{\text{vrai}} - \alpha^{\text{estimé}}$, l'erreur relative d'intensité de la tache pour les deux valeurs extrêmes d'assombrissement centre-bord.

Une sous-évaluation de l'angle tend à diminuer la valeur trouvée de la tache. En effet, lorsque $\alpha = 30^\circ$ la tache est toujours visible, mais son flux qui parvient à l'observateur est atténué par la fonction d'assombrissement centre-bord et par la projection du vecteur sur l'axe de visée, et ceci d'autant plus que la tache est proche du plan du ciel P_o . Or, à mesure que l'angle diminue, la tache s'éloigne de P_o et pour un flux reçu donné, la valeur intrinsèque de la tache doit être diminuée. L'allure de la courbe obtenue s'explique

4. L'angle d'inclinaison est parfois évalué connaissant le $vsini$ et la vitesse angulaire. Celle-ci est alors estimée à partir de l'activité chromosphérique d'autant plus importante que la vitesse de rotation est grande. Cette méthode ne donne qu'une idée grossière de l'inclinaison. Enfin grâce à l'interférométrie, la surface de quelques rares étoiles est résolue ce qui autorise une détermination directe de cet angle.

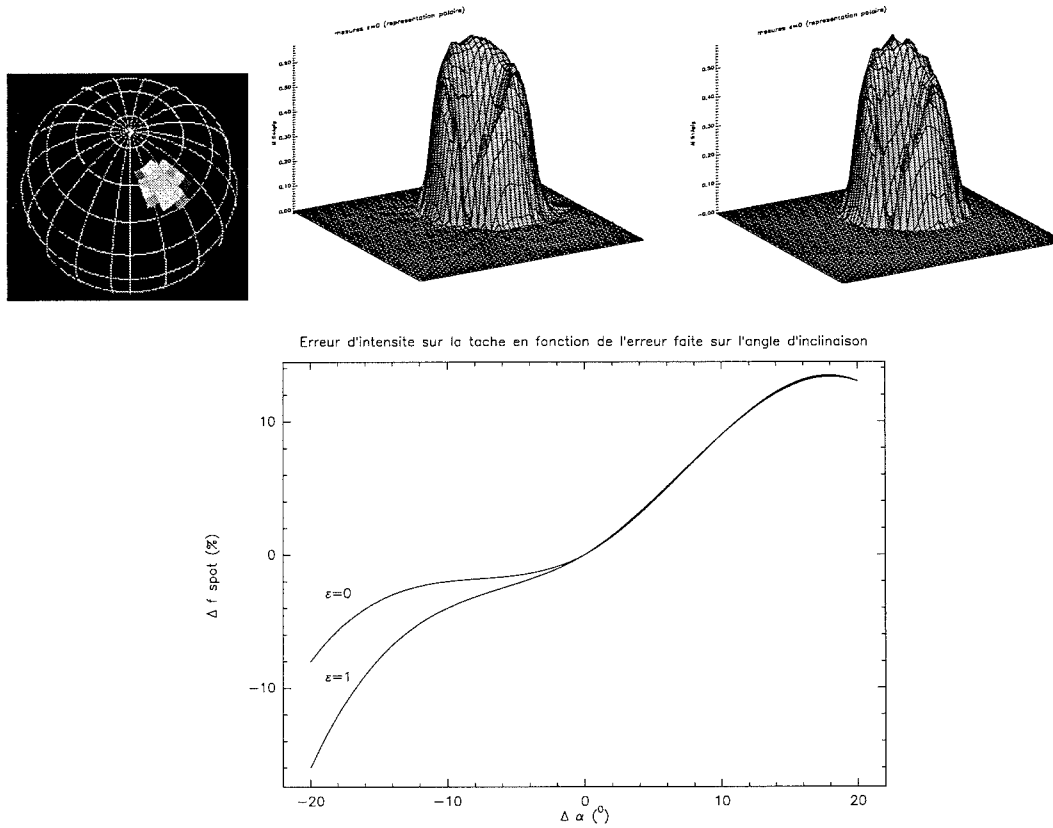


FIG. 3.6 – En haut à gauche est représentée la solution à reconstruire. En haut à droite sont données les mesures pour les valeurs respectives du coefficient d'assombrissement centre-bord : $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$. Le graphe représente l'erreur relative sur l'intensité de la tache sur l'hémisphère nord en fonction de l'erreur d'inclinaison, $\Delta\alpha = \alpha^{\text{vrai}} - \alpha^{\text{estimé}}$, pour les valeurs du coefficient d'assombrissement centre-bord, $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$.

par la pente des fonctions d'assombrissement centre-bord et de projection. Enfin, on note que si l'angle est sous-estimé, l'erreur faite est plus importante pour une valeur du limbe $\epsilon = 1$. En effet dans ce cas, la loi d'assombrissement centre-bord se comporte en $\cos^2 \theta_0$. La variation avec la latitude est ainsi plus importante (pour θ petit) que si que l'atténuation obtenue avec la loi est en $\cos \theta$.

Le second exemple illustre la difficulté à reconstruire des structures localisées dans les régions de l'étoile rarement visibles au cours de sa rotation. À cette fin, considérons une tache chaude localisée sur le 34^{ème} parallèle de l'hémisphère sud. Les données sont simulées pour une inclinaison de l'étoile $\alpha = 65^\circ$. La figure 3.7 donne l'erreur faite sur l'intensité de la tache en fonction de celle sur l'angle d'inclinaison. Du fait de l'ambiguïté nord-sud (voir

section 3.3.1) qui se fait d'autant plus sentir que l'angle d'inclinaison augmente, la tache se retrouve sur les deux hémisphères. C'est pourquoi sont représentées d'une part l'erreur sur l'intensité de la tache reconstruite sur l'hémisphère sud, d'autre part l'erreur faite une fois ajoutées les valeurs prises sur les hémisphères nord et sud. En effet, dans le cas singulier $\alpha = 90^\circ$, toute fonction impaire appartient au noyau de l'opérateur. La solution de moindres carrés de moindre norme est telle que $f^+ = f^-$: la tache est répartie sur les deux hémisphères. En ajoutant ces deux derniers, l'intensité de la tache est correctement évaluée.

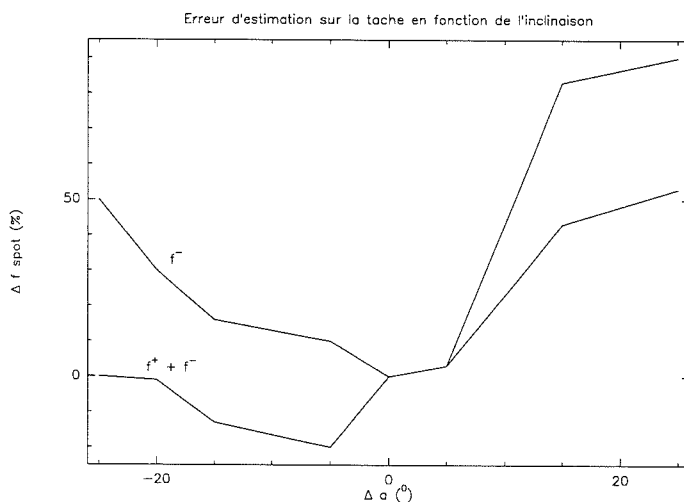


FIG. 3.7 – L'erreur relative sur l'intensité de la tache de l'hémisphère sud est représentée en fonction de l'erreur d'inclinaison, pour une valeur nulle du limbe. Du fait de l'ambiguïté nord-sud, l'erreur relative, une fois ajoutées $f^+ + f^-$, est moindre.

En conclusion, l'erreur sur l'angle d'inclinaison induit une erreur relativement importante sur les valeurs du facteur de remplissage f . Seule la localisation des structures reste fiable. L'erreur d'estimation de l'angle d'inclinaison est souvent la conséquence d'une erreur sur la période qui influe de manière directe sur la localisation des structures reconstruites.

Sensibilité à l'erreur d'estimation de la période

Nous admettrons que le $v \sin i$ de l'étoile est parfaitement connu et que seule la période est sujette à une erreur d'estimation. Celle-ci se traduit par une attribution erronée de la phase observée au du spectre mesuré : un spectre correspondant à la phase ω sera attribué à la phase $\omega \frac{P_{\text{vraie}}}{P_{\text{estimée}}}$ où P_{vraie} et $P_{\text{estimée}}$ sont respectivement la période vraie et la période estimée. La valeur du facteur de remplissage comme la localisation des taches

s'en trouvent perturbées. Dans ce qui suit, nous illustrons par trois exemples la sensibilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation de la période et donnons quelques éléments de réponse à l'analyse de ces résultats.

Dans chacun des trois exemples, la fonction à reconstruire est une tache d'un rayon de 0.2 unités dans le plan du ciel, localisée dans l'hémisphère nord. Les données sont simulées pour un angle d'inclinaison de 30° . Chacun des exemples vient illustrer le niveau de difficulté graduel de la reconstruction suivant la position de la tache (près du pôle, à des latitudes intermédiaires, vers l'équateur), et ce pour différentes erreurs de la période $\Delta P = P_{\text{estimée}} - P_{\text{vraie}}$. Sur la figure 3.8 sont données en coordonnées polaires dans le plan du ciel, les erreurs de localisation d'une tache polaire ($\theta_r = 82^\circ$) et d'une tache à des latitudes intermédiaires ($\theta_r = 55.5^\circ$). L'erreur faite sur l'intensité n'est pas donnée bien qu'elle puisse être non négligeable. De même, il existe une erreur sur le rayon de la tache. Celui-ci est difficile à estimer dans la mesure où la frontière de la tache avec la région avoisinante n'est pas aussi bien marquée du fait de la régularisation. En revanche, la reconstruction de la tache polaire est assez bonne : l'erreur de position reste négligeable pour des erreurs importantes de la période, ce qui n'est pas le cas de la tache située sur le parallèle 55.5° . Par ailleurs, l'erreur faite en longitude semble plus importante que celle faite en latitude, au moins pour de petites erreurs de la période, voir Fig. 3.8. La tache reconstruite est de moins en moins circulaire et plus étendue.

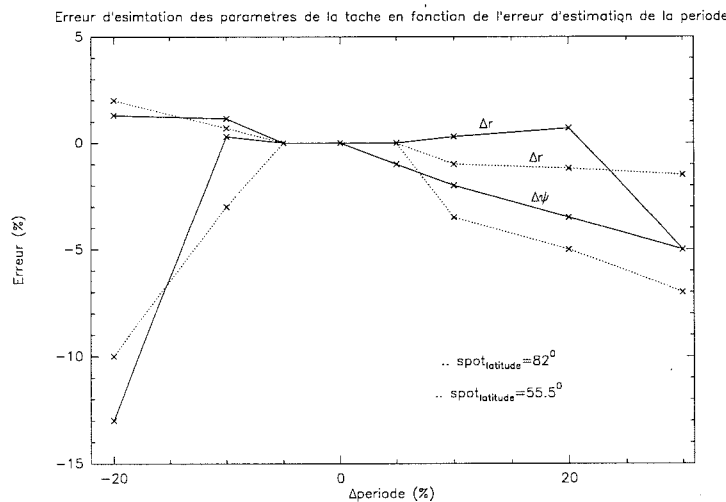


FIG. 3.8 – La figure présente les erreurs sur les paramètres de position de la tache Δr et $\Delta \psi$, en fonction de l'erreur relative sur la période. Deux cas de reconstruction sont donnés : une tache polaire de latitude 82° et une tache, à des latitudes intermédiaires, centrée sur la latitude 55.5° . La tache polaire est bien reconstruite même pour de larges erreurs sur l'estimation de la période, contrairement à celle située à la latitude 55.5° .

L'erreur faite sur la position de la tache polaire est nettement moins importante que celle faite sur la tache de latitude 55° . En effet, d'une part les points du pôle sont toujours visibles, d'autre part, pour un échantillonnage régulier en phase et en longueur d'onde (variable scalaire de la transformée de Radon), la résolution est moindre au pôle : si la position de la tache est un peu perturbée, la mesure qui en résulte diffère peu, voir notamment le graphe 1.5. C'est pourquoi la reconstruction de structures situées aux hautes latitudes est assez stable. La situation contraire se dessine aux latitudes intermédiaires. Par ailleurs, la longitude tend à être sous-évaluée lorsque la période estimée est légèrement supérieure à la vraie période : une sous-évaluation a pour effet de diminuer, en quelque sorte, la vitesse à laquelle le profil se déforme. La vitesse à laquelle un point de la sphère passe d'une courbe d'iso-vitesse à une autre est donnée par l'équation (1.3) d'où on obtient :

$$\frac{ds}{\phi} = \cos \theta_r \cos(\psi_r + \phi). \quad (3.13)$$

Ainsi, pour rendre compte d'une diminution de la vitesse à passer d'une courbe à une autre, on peut jouer sur la latitude ou la longitude du point. Par exemple si la période augmente, la vitesse diminue et la position en latitude de la tache a tendance à être surévaluée (le rayon r est lui sous-évalué).

La fonction d'assombrissement centre-bord et la projection du vecteur intensité sur l'axe de visée jouent un rôle également. En effet lorsque la période augmente, la modulation d'amplitude de la tache est plus lente. Or, du fait de la fonction de projection et d'assombrissement centre-bord, combinaisons linéaires des fonctions $\cos \theta_o$ et $\cos^2 \theta_o$, la latitude est plutôt sous-évaluée. Enfin, il est à remarquer qu'une des difficultés tient à ce que les mesures sont échantillonnées sur le cylindre $S^1 \times [0, 1]$ alors que la fonction est reconstruite sur une grille cartésienne, ce qui est peut être un élément de réponse concernant les différences d'amplitude de l'erreur entre la longitude et la distance r à l'origine.

Le dernier exemple montre la difficulté à reconstruire des fonctions proches de l'équateur. Sur la figure 3.9 est représentée, sur la sphère, la fonction reconstruite pour des erreurs relatives de la période s'échelonnant de -20 à 20% . Pour un angle d'inclinaison de 30° , les points ne seront pas souvent visibles (1.4). Par ailleurs dans cette région, si la position de la tache est un peu modifiée, la vitesse à laquelle celle-ci passe d'une courbe d'iso-vitesse à l'autre est "fortement" modifiée (3.13). La reconstruction est alors très sensible aux erreurs d'estimation de la période.

Influence des conditions observationnelles

Dans cette partie est étudié le conditionnement du problème à données manquantes. Il s'agit d'un problème difficile qui actuellement fait, en tomographie, l'objet nombreuses études. La stabilité comme l'unicité ne sont en général pas garanties, même dans le cadre théorique d'une infinité de projection [59]. Quelques résultats sont donnés dans [105] p.158,

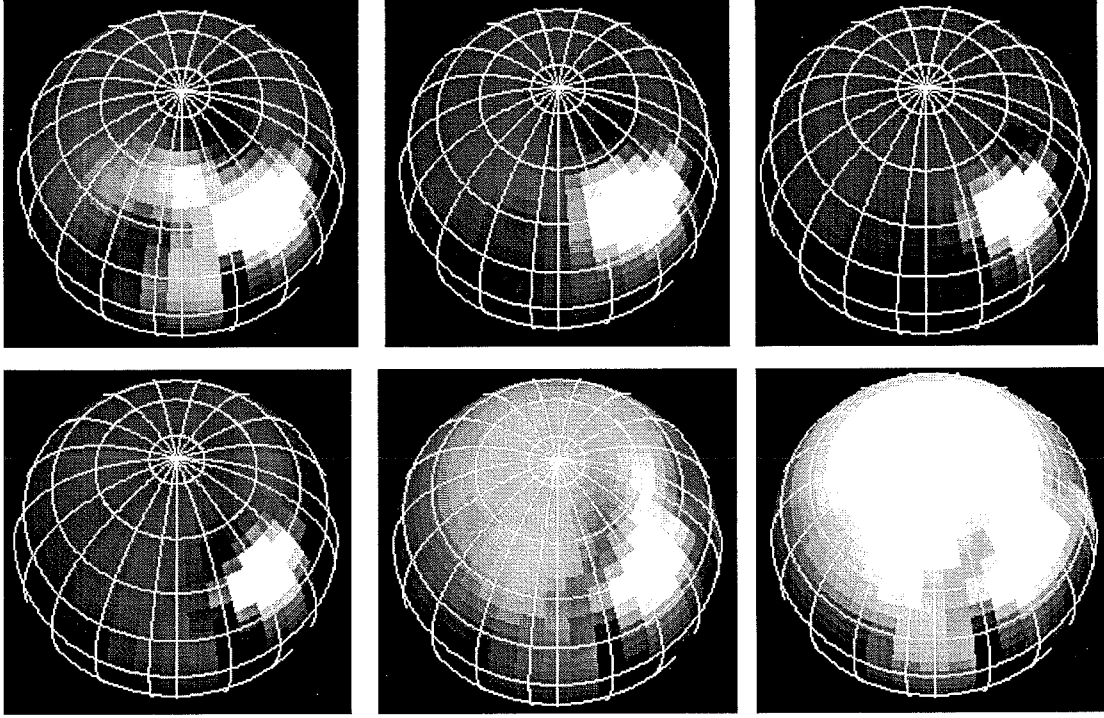


FIG. 3.9 – Sont représentées sur la sphère les fonctions reconstruites en fonction de l'erreur d'estimation de la période. Les mesures simulées sont issues d'une distribution sur la sphère réduite à une tache équatoriale (latitude 38° , rayon 14°) pour un angle d'inclinaison de l'étoile de 30° . De la première à la dernière fonction, les erreurs sur la période sont de -20% , -10% , -5% , 5% , 10% , 20% .

en particulier concernant le problème dit à angle limité. Par “problème à données manquantes” il faut entendre aussi bien celui où $g(\omega, s)$ est mesuré pour $(\omega, s) \in S_\Psi^1 \times [-1, 1]$ avec $S_\Psi^1 = \{\omega = (\cos \phi, \sin \phi)^t, |\phi| < \Psi\}$ que le “problème extérieur” où g n'est mesurée que pour $\|s\| > a$. On montre que les valeurs singulières de l'opérateur décroissent exponentiellement prouvant là son mauvais conditionnement. Cependant à partir du spectre associé au problème à angle limité, il est possible de distinguer les valeurs singulières proches de celles du spectre du problème complet et les valeurs singulières proches de zéro. Ainsi, les composantes de la fonction correspondant à ces premières peuvent être identifiées. Un résumé des travaux relatifs à ce sujet ainsi que des références bibliographiques sont données dans [59].

Dans ce qui suit deux cas sont étudiés : le premier concerne l'insuffisance du nombre de données et en particulier du nombre de rotations par rapport au nombre de translations. Dans le second, nous donnons quelques résultats concernant le problème à angle limité. A la suite est traitée la stabilité par rapport à un bruit Gaussien centré réduit. Pour un nombre raisonnable de données, le problème est “assez” stable vis à vis du bruit.

De l'insuffisance du nombre de rotations par rapport au nombre de translations

Dans le chapitre suivant, les conditions d'échantillonnage en imagerie Doppler sont présentées plus en détail, c'est pourquoi seuls quelques résultats sont rappelés ici. En tomographie classique il est montré que, sous l'hypothèse que la fonction cherchée est essentiellement b -bande limitée ($\int_{\|\xi\| \geq b} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \epsilon$), la transformée de Radon est correctement échantillonnée. Ceci revient à dire que des détails d'une résolution $2\pi/b$ peuvent être reconstruits de manière fiable si le nombre p de projections (c'est à dire de spectres pris à des phases de rotations, entre $[-\pi, \pi]$, différentes) et le nombre q de translations (c'est à dire de points d'échantillonnage par spectre pris entre $[-1, 1]$) sont dans le rapport⁵ :

$$p = cq^{n-1}, \text{ avec } c = \frac{\pi^{n-1}}{(n-1)!}$$

Bien entendu, la répartition des directions doit être telle qu'elle ne conduit pas au problème à angle limité. En dimension 2 il faut ainsi que $p = \pi q$. Ce rapport est étroitement lié au fait que les mesures sont échantillonnées sur une grille polaire. En effet, il est possible de montrer que, toujours sous l'hypothèse que la fonction est essentiellement b -bande limitée, la transformée de Fourier des mesures est essentiellement contenue dans un support (qui sera précisé plus loin) inscrit dans un carré de longueur $2b$. Ainsi, pour que la condition de Nyquist-Shannon de non-recouvrement soit vérifiée, le pas d'échantillonnage optimal dans l'espace direct est, pour une grille carrée, de $1/b$ en s comme en ω , d'où le rapport π entre le nombre de rotations et le nombre de translations.

Nous donnons dans ce qui suit le résultat de quelques simulations concernant d'une part les conséquences liées à une diminution du nombre de données, d'autre part celles liées à l'insuffisance du nombre de rotations par rapport au nombre de translations. En effet, en imagerie Doppler, le nombre de phases d'observations peut être très limité comparativement au nombre de translations. Cette dernière donnée est liée à la résolution instrumentale du spectromètre qui est en général assez bonne. Par contre, le nombre de phases observées est lié à la période de rotation de l'étoile. Si celle-ci est de quelques jours, le temps d'observation accordé peut être facilement insuffisant.

Les données sont simulées pour la mesure d'une fonction restreinte à une tache de l'hémisphère nord pour un nombre variable de rotations et de translations régulièrement réparties. Sur la figure 3.10, la solution obtenue lorsque le nombre de données varie, mais à rapport constant du nombre de rotations sur le nombre de translations, est représentée dans le plan équatorial.

5. En tenant compte de la parité de la transformée de Radon par rapport à la variable angulaire, le nombre de rotations peut être divisé par deux. D'autre part, un échantillonnage efficace permet de diminuer par deux le nombre de translations, voir chapitre suivant.



FIG. 3.10 – De gauche à droite la solution obtenue pour un nombre de données respectivement de 756, 340, 135 est représentée dans le plan équatorial. Le rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations est fixé à 3.

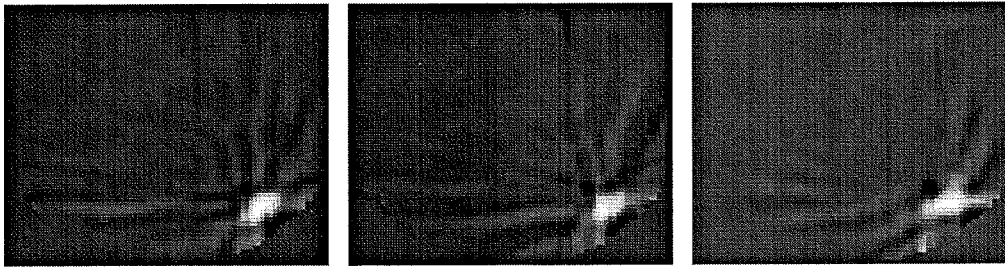


FIG. 3.11 – De gauche à droite sont représentées les solutions obtenues pour un rapport variable du nombre de rotations sur le nombre de translations, et un nombre de données fixé à 340. Avec la diminution de ce rapport, la tâche tend à se confondre avec le fond, ce qui confirme une dégradation de la résolution. Le rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations est pour chaque image respective de 2, 1 et $1/2$.

Lorsque le nombre de données diminue, des artefacts apparaissent. De même la résolution semble bien diminuer avec le rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations, voir fig. 3.11. Cependant, ceci ne permet pas de conclure si les conditions de non recouvrement, lorsque ce rapport est proche de π , sont vérifiées. Nous montrerons qu'il est possible, pour les deux cas extrêmes d'inclinaison de l'étoile, d'établir le support essentiel de la transformée de Fourier des mesures.

Problème des données à angle limité

En tomographie il est montré que le caractère mal posé du problème inverse n'est pas catastrophique, voir [105]. Il en est tout autrement du problème à angle limité. L'unicité de celui-ci est bien garantie dans le cadre théorique d'une infinité de mesures. Ceci s'explique par le fait que la transformée de Fourier d'une fonction à support compact est analytique

(pour la démonstration de l'unicité, voir [105] p.33, [59]). Par contre, reconstruire la fonction revient à faire un prolongement analytique, opération très instable. Par exemple, en dimension trois, la fonction peut être reconstruite par :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{S^2} g''(\theta, x \cdot \theta) d\theta, \quad g = Rf.$$

Ainsi il est fondamental, en particulier pour détecter les sauts de discontinuités, d'avoir les intégrales sur les plans où g varie considérablement, c'est à dire les plans tangents aux surfaces où f est non continue. Si ces données manquent, la fonction ne pourra être correctement évaluée. En dimension deux, la transformée de Hilbert qui apparaît dans la formule de rétroprojection, voir section 1.3.3, rend cette dernière non locale. Cependant, le même argument s'applique. Les quelques simulations numériques qui suivent donnent une idée du caractère alors mal posé du problème.

Les solutions obtenues pour des valeurs croissantes du "trou en phase" sont représentées dans le plan du ciel, voir Fig. 3.12. Le rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations est fixé à 3.

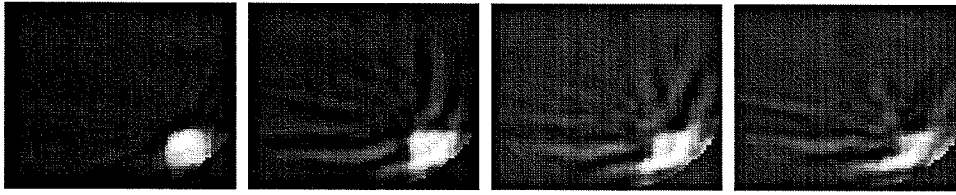


FIG. 3.12 – De gauche à droite la solution obtenue pour un trou en phase respectivement de 0, 5, 20, 40°. Le rapport du nombre de rotations sur le nombre de translations est fixé à 3. Comme en tomographie classique, le problème à angle limité est très mal posé. Des artefacts apparaissent même pour des trous en phase négligeables.

Sensibilité au rapport signal sur bruit

Le problème est assez stable s'il s'agit de reconstruire des structures de l'hémisphère nord (voir analogie avec la tomographie). Les structures de l'hémisphère sud ne peuvent être reconstruites que pour des angles d'inclinaison suffisamment grands, pour que ces structures soient visibles durant une bonne fraction de la période de rotation de l'étoile. Cependant, l'ambiguïté nord-sud devient alors prépondérante. Dans ce qui suit, nous montrons la relative stabilité des reconstructions à un bruit Gaussien centré réduit. Le signal sur bruit est ici défini comme le rapport de la valeur maximale du signal et de l'écart-type du bruit. Un anneau aux latitudes intermédiaires et une tache proche de l'équateur

sont cherchés. La solution reconstruite est montrée sur la figure 3.13 pour deux angles d'inclinaison.

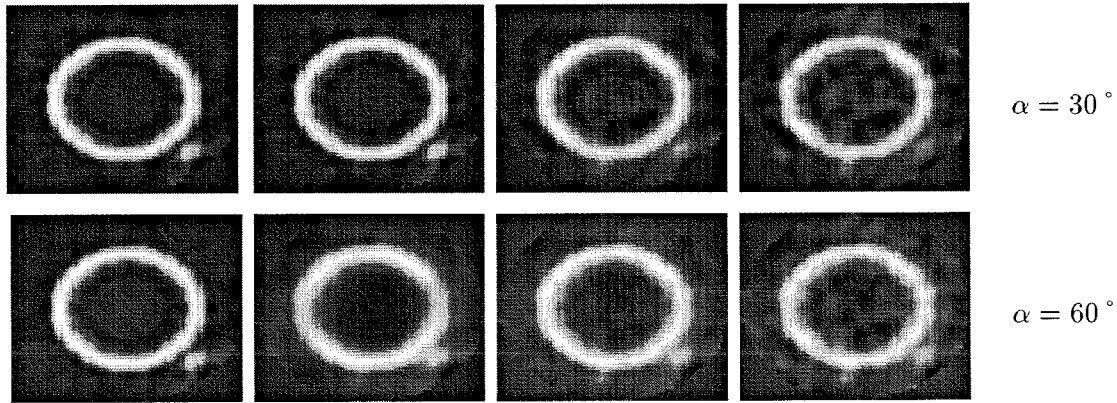


FIG. 3.13 – De droite à gauche, la solution reconstruite pour un rapport signal sur bruit infini puis de 100, 20 et 10. En haut, l'inclinaison de l'axe de rotation sur l'axe de visée est $\alpha = 30^\circ$, en bas, $\alpha = 60^\circ$. La fonction est moins bien reconstruite au voisinage de l'équateur. Par contre, la reconstruction semble légèrement meilleure pour une inclinaison de 30° que de 60° . On notera que la valeur du paramètre de régularisation sélectionné selon le critère de validation croisée est de 5.10^{-3} pour des valeurs de signal sur bruit supérieures à 20 et de 5.10^{-2} pour un signal sur bruit de 10.

La reconstruction est relativement stable vis à vis des effets de fluctuations dues au bruit. Elle est d'autant meilleure que les structures cherchées sont éloignées de l'équateur. En effet, tandis que la région vers le pôle est toujours visible, celle vers l'équateur ne l'est qu'à certaines phases de la rotation. D'autre part, pour des angles d'inclinaison très petits, voire nuls, la région proche de l'équateur est presque toujours visible mais les rayons qui arrivent à l'observateur ont une composante presque nulle, voire nulle, sur l'axe de visée. L'effet est renforcé par une augmentation du coefficient d'assombrissement centre-bord. Ceci explique qu'il n'y ait pas de grandes différences entre les reconstructions faites pour un angle $\alpha = 60^\circ$ et un angle $\alpha = 30^\circ$.

Sensibilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation des températures

Cette analyse est importante dans la mesure où l'incertitude, en particulier celle sur la température des taches, est grande. Il est des cas (dont un exemple probant est donné dans la seconde partie) où l'observateur ignore si les régions dont la température diffère de celle de la photosphère sont plus chaudes ou plus froides que celle-ci. Les deux températures T_{spot} et T_{phot} n'apparaissent pas explicitement dans la liste des paramètres d'entrée du code. Il faut remonter à l'équation (2.1) où d'une part un profil dépendant en particulier de la température de la photosphère a été soustrait aux données brutes, à la

suite de quoi ces données ont été déconvoluées par un noyau dépendant de la différence $I_{\lambda_0}(T_{spot}) - I_{\lambda_0}(T_{phot})$. L'hypothèse est faite que le profil intrinsèque est la distribution de Dirac c'est à dire que la raie émise ou absorbée est parfaitement monochromatique. Dans la décomposition paire-impair, des équations (2.1) et (2.2) est obtenu :

$$G(\phi, \lambda) = \frac{S(\phi, \lambda) - S_{phot}(\phi, \lambda)}{I_{\lambda_0}(T_{spot}) - I_{\lambda_0}(T_{phot})}.$$

Si la température de la photosphère estimée est $T_{phot}^{estimée}$, aux mesures telles qu'elles devraient être calculées est ajouté le profil issu d'une sphère à la température $T_{phot} - T_{phot}^{estimée}$. Or, toute fonction radiale appartient au noyau des opérateurs M . Ceci signifie qu'à la vraie solution est ajoutée une fonction constante sur chaque hémisphère, dont la valeur dépend de l'angle d'inclinaison (voir la section précédente sur les fonctions radiales du noyau).

Par ailleurs, une erreur d'estimation sur la différence $D = I_{\lambda_0}(T_{spot}) - I_{\lambda_0}(T_{phot})$ entre les deux températures extrêmes revient à augmenter d'un facteur $\frac{D_{vraie}}{D_{estimée}}$ les mesures. Ainsi, dans le cas où la différence est sous-évaluée, la solution déduite sera plus contrastée, car augmentée d'un facteur supérieur à l'unité.

Sensibilité au taux de régularisation

Le paramètre de régularisation est choisi selon le critère de validation croisée généralisée, voir section 3.2.2. Quelques exemples numériques montrent l'importance du choix de ce paramètre c'est à dire d'un "bon" compromis entre la fidélité aux mesures et l'information d'une solution *a priori* assez régulière.

Sur la figure 3.14 sont représentées les solutions pour différentes valeurs du taux de régularisation et différents rapports signal sur bruit. La valeur du taux de régularisation estimé par minimisation de la fonction de validation croisée généralisée est de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$ à $5 \cdot 10^{-2}$ selon la valeur du signal sur bruit pour un rapport du nombre de projections sur le nombre de translations de π .

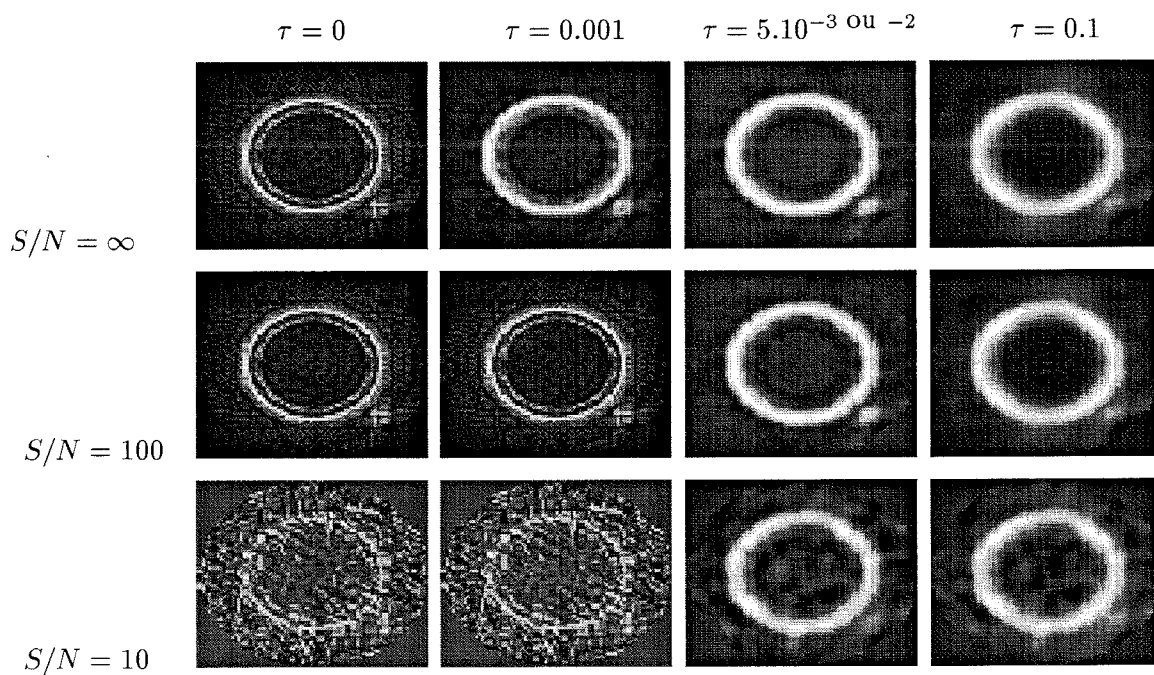


FIG. 3.14 – De droite à gauche, solutions reconstruites pour un taux de régularisation τ respectivement nul, de 0.001, sélectionné par maximisation de la fonction de validation croisée (de l'ordre de $5 \cdot 10^{-3}$, $5 \cdot 10^{-2}$) et de 0.1. De la ligne du haut à la dernière ligne le signal sur bruit vaut respectivement ∞ , 100 et 10. Lorsque le paramètre de régularisation est correctement choisi, la reconstruction est stable vis à vis du bruit (troisième colonne). Elle devient très sensible au bruit dans le cas où le paramètre est sous-estimé (deux premières colonnes). La solution est relativement indépendante du bruit lorsque la régularisation prévaut sur la fidélité aux mesures (colonne de droite).

Chapitre 4

Échantillonnage efficace en imagerie Doppler

Sommaire

4.1	Rappels sur l'échantillonnage des signaux	116
4.2	Qu'est-ce que l'échantillonnage efficace	117
4.3	Échantillonnage efficace en tomographie classique	118
4.4	Échantillonnage efficace de la transformée de Radon invariante par rotation : application à l'imagerie Doppler	121

Dans la pratique, la solution de tout problème inverse est cherchée pour un nombre fini de données. Or les résultats établis dans un cadre continu peuvent être très différents de ceux établis dans un cadre discret. En particulier, la question de l'identifiabilité et de la précision de la solution dépend très fortement de la géométrie d'acquisition des données. Pour des raisons technologiques, de rapidité de temps d'acquisition et parfois de temps de calcul, il est souhaitable d'adopter le schéma d'échantillonnage qui, pour une résolution donnée, autorise à effectuer le plus petit nombre de mesures. En d'autres termes, la géométrie d'acquisition est dite optimale si elle conduit à l'algorithme, pour une "qualité" donnée de la reconstruction, utilisant le nombre minimal de mesures. La théorie de l'échantillonnage repose essentiellement sur l'analyse de Fourier. Dans une première section les théorèmes fondamentaux sont rappelés. Ce que l'on entend par échantillonnage efficace est précisé dans la seconde section. Celle-ci est naturellement suivie de l'application à la tomographie classique et à l'imagerie Doppler.

4.1 Rappels sur l'échantillonnage des signaux

Cette section est essentiellement un résumé de ce qui est présenté sur l'échantillonnage dans [60, 43]. Un des théorèmes fondamentaux en traitement du signal est le théorème de Shannon d'après lequel des signaux choisis dans certaines classes de fonctions peuvent être échantillonnés sans qu'il y ait perte d'information. Ce théorème s'appuie sur la formule de Poisson [60]p.284 :

Théorème 15 *Soit la formule de Poisson :*

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi hl) = (2\pi)^{-n/2} h^{-n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\frac{k}{h}\right) e^{ix \cdot \frac{k}{h}} \quad (4.1)$$

et sa forme duale :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}\left(\xi - \frac{2\pi}{h}l\right) = (2\pi)^{-n/2} h^n \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) e^{-ih\xi \cdot k}, \quad (4.2)$$

alors si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, l'égalité (4.1) exprime celle de la fonction périodique

$$F(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(x - 2\pi hl)$$

avec sa série de Fourier.

L'égalité (4.1) n'a de sens que si les valeurs ponctuelles de \hat{f} existent, ce qui n'est pas le cas, par exemple, des fonctions $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Par contre, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors \hat{f} est continue et bornée et les coefficients $\hat{f}(\frac{k}{h})$ sont bien définis. Ainsi le membre de droite est une série trigonométrique qui converge dans \mathcal{D}' vers une distribution périodique tempérée. Les valeurs ponctuelles n'apparaissent plus dans le membre de gauche où la somme doit être interprétée comme le produit de convolution de f avec le peigne de Dirac. Ici f peut être une distribution et il faut simplement que la série converge. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $F \in L^1_p([0, 2\pi]^n)$: la série converge dans cet espace de fonctions.

L'équation (4.2) donne le spectre d'un signal échantillonné. Elle signifie que échantillonner une fonction revient à périodiser son spectre d'une période de $\frac{2\pi}{h}$. Ainsi si le spectre de la fonction non échantillonnée est limité en fréquence et si la fréquence d'échantillonnage est suffisante pour qu'il n'y ait pas recouvrement des spectres périodisés ($\frac{2\pi}{h}$ assez grand), l'idée est de l'isoler par un filtrage adapté. Par exemple le signal périodisé est multiplié par la fonction porte $\chi_{[-\pi/h, \pi/h]^n}$. Il suffit ensuite de procéder à une transformée de Fourier inverse pour reconstruire le signal. C'est ce qu'exprime la formule d'interpolation de Shannon : pour certaines classes de fonctions, le signal est totalement déterminé par ses valeurs discrètes.

Théorème 16 *Si $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $\text{Supp}(\hat{f}) \subset [-b, b]^n$, alors $\forall h < \pi/b$:*

$$f(x) = S_h(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(hk) \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h}(x - hk)\right).$$

La condition $h < \pi/b$ est connue sous le nom de condition de Nyquist-Shannon et signifie simplement que le pas d'échantillonnage doit être suffisamment fin pour connaître parfaitement la fonction à partir de ses valeurs discrètes. Ainsi le théorème de Shannon donne une formule d'interpolation de la fonction.

En réalité, la transformée de Fourier d'une fonction n'est évidemment jamais à support limité. S'il en était ainsi, la fonction serait analytique et ne serait pas à support compact. Ce qui précède n'est ainsi vérifié dans la pratique que dans de très rares cas. Par contre, il est possible de majorer l'erreur d'interpolation faite. On montre que :

$$|S_h(f)(x) - f(x)| \leq 2(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n \setminus [-\pi/h, \pi/h]^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

Ainsi, si $\mathbf{K} = [-b, b]^n$ est le support essentiel de \hat{f} c'est à dire si $\int_{\xi \notin \mathbf{K}} |\hat{f}| d\xi$ est négligeable devant $\|f\|_{L^1}$ alors si la condition de Nyquist-Shannon $\pi/h \geq b$ est vérifiée, l'erreur d'échantillonnage est négligeable devant $\|f\|_{L^1}$.

4.2 Qu'est-ce que l'échantillonnage efficace

L'échantillonnage tel qu'il vient d'être présenté est réalisé sur une grille carrée. En dimension 2 par exemple, ce schéma d'échantillonnage est engendré par les vecteurs de la base canonique $e_1(1, 0)^t$ et $e_2(0, 1)^t$. Nous allons voir que cette grille n'est pas toujours optimale. Ce qui suit est un résumé succinct de ce qui est présenté dans [43].

Échantillonnage suivant une grille quelconque

Considérons maintenant que l'échantillonnage du signal est engendré par les vecteurs libres w_1, w_2 de \mathbb{R}^2 . Si k_1 et k_2 sont les pas d'échantillonnage dans les directions respectives w_1, w_2 , les points de mesures sont faits en $(k_1 w_1 + k_2 w_2) = Wk$, avec $k \in \mathbb{Z}^2$. La matrice W n'est autre que celle dont les colonnes sont les vecteurs w_1 et w_2 . La fonction échantillonnée selon ce schéma est notée $f_W(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(Wx)$. Sa transformée de Fourier est :

$$\hat{f}_W(\xi) = \frac{\hat{f}(W^{-t}\xi)}{|\det W|}.$$

La formule de Poisson devient alors :

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}^n} \hat{f}(\xi - 2\pi W^{-t}l) = (2\pi)^{-n/2} |\det W| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(Wk) e^{-i\xi \cdot Wk}.$$

Si \mathbf{K} est le support essentiel du spectre du signal, la condition de non recouvrement devient :

$$\mathbf{K} + 2\pi W^t l, l \in \mathbb{Z}^n \text{ sont deux à deux disjoints.}$$

Aussi, pour obtenir la formule d'interpolation de Shannon, il suffit d'isoler le spectre de la fonction en multipliant par l'indicatrice de son support. Si $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, la formule de Shannon s'écrit :

$$f(x) = S_W(f)(x) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-n/2} |\det W| \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(Wk) \hat{\chi}_{\mathbf{K}}(Wk - x).$$

L'idée est de sélectionner le schéma d'échantillonnage qui demande le moins de points de mesure c'est à dire celui selon lequel l'aire de la maille élémentaire (qui est donnée par $|\det W|$) est maximale. En résumé, parmi toutes les matrices vérifiant la condition de Nyquist-Shannon, est retenue celle qui minimise $|\det W^{-t}|$. Le rapport d'efficacité entre deux schéma est alors naturellement défini par le rapport des aires élémentaires engendrées par chacun de deux schémas.

Exemple : échantillonnage d'une fonction b bande limitée

Il est bien connu que la grille hexagonale convient mieux à l'échantillonnage d'une fonction dont la transformée de Fourier est contenue dans un disque. En effet soit b le rayon du disque, alors la meilleure grille carrée qui satisfait la condition de non recouvrement est engendrée par la matrice π/bI avec I matrice identité, voir Fig. 4.1 en haut. Cependant pour paver au mieux l'espace de Fourier, il est préférable de choisir un maillage hexagonal, voir fig. 4.1 en bas. En effet, les matrices respectives des schéma standard et hexagonal sont :

$$2\pi W_S^{-t} = \begin{bmatrix} 2b & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix}, \quad 2\pi W_H^{-t} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}b & 0 \\ b & 2b \end{bmatrix}$$

et le rapport d'efficacité est : $|\det W_H| = 2/\sqrt{3} |\det W_S|$.

4.3 Échantillonnage efficace en tomographie classique

Trouver le schéma d'échantillonnage efficace qui convient en tomographie revient à échantillonner correctement et de manière optimale la transformée de Radon. Comme le montre l'analyse de Fourier, la difficulté principale est d'établir le support essentiel de la transformée de Fourier de la transformée de Radon d'une fonction.

En écrivant la transformée de Radon $Rf(\omega, s)$ sous la forme $Rf(\phi, s)$ (on rappelle que $\omega = (\cos \phi, \sin \phi)^t$), celle ci devient 2π périodique en la première variable. De manière générale, si une fonction de \mathbb{R}^n est 2π périodique en ses n_1 premières variables alors elle peut être définie sur $T^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$ où T est le groupe quotient $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et sa transformée de

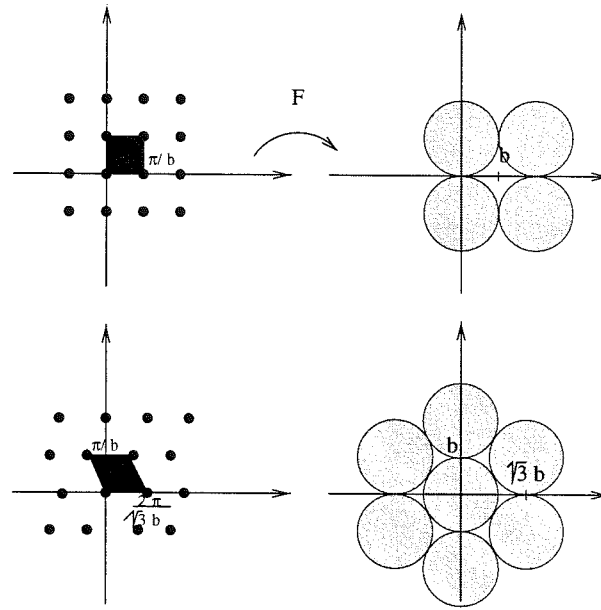


FIG. 4.1 – Échantillonnage d'une fonction dont le spectre est contenu dans le disque de rayon b . En haut, le schéma le meilleur pour paver l'espace de Fourier avec la grille standard est engendré par π/bI . En bas, le schéma hexagonal engendré par les vecteurs $w_1(\sqrt{3}b, b)^t$ et $w_2(0, 2b)^t$ est plus adapté. Le rapport d'efficacité est donné par le rapport des aires des mailles élémentaires. Ainsi, le schéma hexagonal est $\sqrt{3}$ fois plus efficace que le schéma standard.

Fourier est :

$$\hat{g} : \mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \longrightarrow C$$

$$\xi(k, \sigma) \longrightarrow \hat{g}(\xi) = (2\pi)^{-(n_1+n_2/2)} \int_{T^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(\phi, s) e^{-i(\phi \cdot k + s \cdot \sigma)} ds d\phi$$

et la transformée de Fourier inverse est définie par :

$$\check{g} = (2\pi)^{-n_2/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^{n_1}} \int_{\mathbb{R}^{n_2}} g(k, \sigma) e^{i(\phi \cdot k + s \cdot \sigma)} d\sigma.$$

En dimension 2, la transformée de Fourier de la transformée de Radon s'écrit simplement :

$$\hat{g}_k(\sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \hat{g}(\phi, \sigma) d\phi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \text{ et}$$

$$\hat{g}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(\phi, s) ds.$$

Le théorème suivant établi par Natterer [105] donne le support essentiel du spectre de la transformée de Radon d'une fonction essentiellement b -bande limitée. Rappelons qu'une

fonction est dite essentiellement b -bande limitée si $\epsilon_0(f, b)$ est négligeable devant $\int |\hat{f}(\xi)| d\xi$ avec :

$$\epsilon_d(f, b) = \int_{|\xi| > b} |\xi|^d |\hat{f}(\xi)| d\xi.$$

Par ailleurs, la fonction $\eta(\vartheta, b)$ est dite très rapidement décroissante en b si pour $0 < \vartheta < 1$ il existe trois constantes strictement positives $A(\vartheta)$, $B(\vartheta)$ et $C(\vartheta)$ telles que :

$$\forall b > B(\vartheta), \quad 0 \leq \eta(\vartheta, b) \leq C(\vartheta) e^{-A(\vartheta)b}.$$

La variable ϑ contrôle en quelque sorte la décroissance de la fonction η .

Théorème 17 [105] Soit $f \in C_0^\infty(\Omega)$ et $g(\phi, s)$ sa transformée de Radon, soit

$$\mathbf{K}_2 = \{(k, \sigma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; |\sigma| < b, |k| < \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}$$

alors

$$\sum_k \int_{(k, \sigma) \notin \mathbf{K}_2} |\hat{g}_k(\sigma)| d\sigma \leq \eta(\vartheta, b) + \frac{8}{\vartheta\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} \epsilon_0(f, b).$$

L'ensemble \mathbf{K}_2 contient donc le support essentiel de \hat{g}_k , voir Fig. 4.2. Le support trouvé,

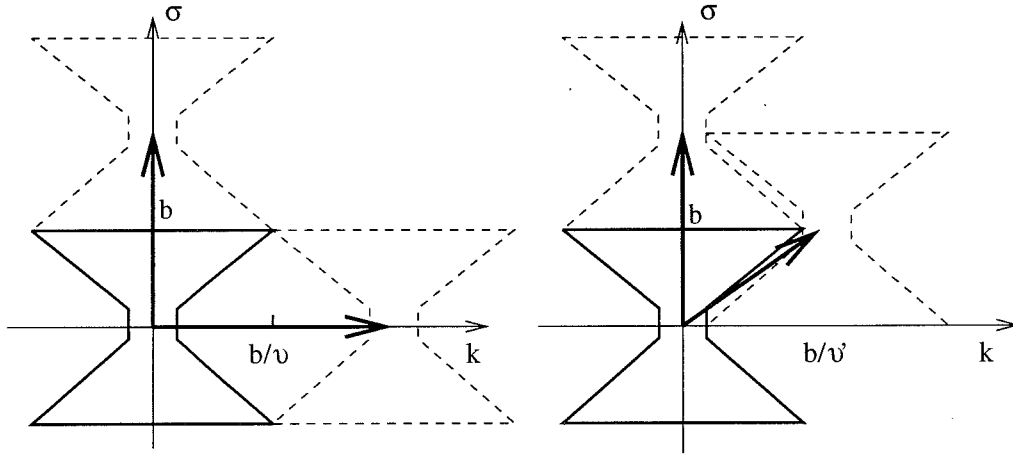


FIG. 4.2 – Échantillonnage efficace de la transformée de Radon d'une fonction essentiellement b -bande limitée. En trait plein est représenté l'ensemble \mathbf{K}_2 c'est à dire le support essentiel de $\hat{g}_k(\sigma)$. La grille standard optimale est ainsi engendrée, pour $\vartheta \sim 1$, par les vecteurs $(2b, 0)^t$ et $(0, 2b)^t$ (à gauche) tandis que le schéma entrelacé est engendré par $(b, b)^t$ et $(0, 2b)^t$ (à droite). Ainsi les aires des mailles élémentaires de ces deux schémas sont dans un rapport peu différent de 2 : le schéma entrelacé est presque deux fois plus efficace que le schéma standard.

il est alors facile de déduire de cet ensemble \mathbf{K}_2 quelle est la meilleure grille carrée qui

satisfait aux conditions de Nyquist-Shannon :

$$W_S = \begin{bmatrix} \pi/P & 0 \\ 0 & 2/Q \end{bmatrix}$$

où P et Q sont respectivement le nombre de projections (c'est à dire le nombre de positions angulaires pour lesquelles $Rf(\omega, s)$ est mesurée et le nombre de points par projection. Pour un choix optimal de P et Q il faut que $\pi Q/2 = b$ et $2P = \pi Q/\vartheta$. D'après le support de \hat{g}_k il est évident que cette grille n'est pas la plus efficace. Le schéma entrelacé déduit de la matrice :

$$W_I = \begin{bmatrix} 2\pi/P & -\pi/P \\ 0 & 2/Q \end{bmatrix}$$

avec $\pi Q/2 = b$ et $2P = \pi Q/\vartheta'$ ($\vartheta' = \vartheta/(2 - \vartheta)$) satisfait les conditions de non recouvrement. Échantillonner suivant ce schéma revient à ne prendre, par rapport au schéma standard, qu'une mesure sur deux en la variable scalaire s . Pour la direction suivante, le même pas en s est conservé mais les mesures sont décalées de $s/2$. Ainsi le schéma entrelacé est pratiquement deux fois plus efficace que le schéma standard. Ces résultats peuvent être étendus en tomographie vectorielle et en tomographie 3D parallèle.

4.4 Échantillonnage efficace de la transformée de Radon invariante par rotation : application à l'imagerie Doppler

Dans les chapitres précédents l'étude de l'imagerie Doppler s'est faite dans le cadre généralisé de la tomographie. Suite à cette étude, il est assez logique de s'interroger sur les conditions d'échantillonnage.

Dans un premier temps le modèle simple, déjà présenté dans des sections 2.2.2, où seule intervient la géométrie a été adopté [47]. Alors dans le cas particulier d'un angle d'inclinaison nul de l'étoile par rapport à l'axe de l'observateur, le problème est équivalent à celui de la transformée de Radon classique de sorte que le schéma entrelacé s'applique. Il s'agit cependant d'un cas d'école puisque pour cette inclinaison il n'existe pas de décalage Doppler (la composante du vecteur vitesse selon l'axe de visée est nulle). Ensuite, nous avons considéré le cas d'inclinaison perpendiculaire montrant que de même, le schéma entrelacé s'appliquait.

En imagerie Doppler, l'échantillonnage porte sur celui de la transformée de Radon invariante par rotation. Nous avons montré [46] que si la fonction poids était un polynôme, alors le support essentiel d'une fonction essentiellement b -bande limitée était l'ensemble

K_2 élargi en la variable k et ce d'autant plus que le degré du polynôme est élevé. Plus précisément :

Proposition 1 *Si la fonction poids $w(s, t)$, associée à la transformée de Radon généralisée g de f , est un polynôme de degré $L + M$ en s et t , $w(s, t) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} s^l t^m$, si $\forall l \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}$, tels que $l \leq L, m \leq M$ et $-l - m \leq n \leq l + m$, la fonction $f(x)|x|^{l+m}e^{-in\psi}$ (avec $(|x|, \psi)$ coordonnées polaires de $x \in \mathbb{R}^2$) est essentiellement b -bande limitée, alors le support essentiel de $\hat{g}_k(\sigma)$ est contenu dans :*

$$K = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < (L + M) + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

On trouvera la démonstration dans l'article ci après ainsi qu'une illustration du support de \hat{g}_k pour des fonctions poids polynômiales de degré 0 et 10. Il apparaît clairement que l'élargissement du support est proportionnel au degré du polynôme.

Cette généralisation des résultats de tomographie classique à la transformée de Radon invariante par rotation pour des fonctions poids polynômiales n'est malheureusement pas suffisante pour conclure sur le schéma d'échantillonnage efficace à adopter en imagerie Doppler. Les résultats ne s'appliquent qu'aux cas particuliers d'inclinaison nulle et perpendiculaire des axes de visée et de rotation. En effet il faudrait élargir ce résultat, établi pour des fonctions poids polynômiales, aux indicatrices d'ellipses. Ce problème ne semble pas très simple. Un moyen de procéder serait d'approcher l'indicatrice par une suite de polynômes et il est fort probable que cette suite fasse intervenir des polynômes "de degré infini" ce qui mettrait hors d'usage le schéma entrelacé. Cependant il peut paraître étonnant qu'un schéma qui s'applique pour les deux angles extrêmes d'inclinaison ne s'applique pas aux angles intermédiaires.

Remarquons que d'un point de vue pratique, l'échantillonnage efficace est tout à fait à la portée des observateurs compte tenu des moyens technologiques dont ils disposent. En effet, pour d'autres raisons, certaines expériences nécessitent le décalage d'un demi-pas en longueur d'onde, du spectrographe; ce que requiert exactement l'échantillonnage entrelacé.

Échantillonnage efficace en imagerie Doppler

Laurent Desbat⁽¹⁾ et Catherine Mennessier⁽²⁾

⁽¹⁾TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525, IAB, faculté de Médecine, UJF
38706 La Tronche, France

⁽²⁾LAOG, Observatoire de Grenoble, UJF, BP 53
F-38041 Grenoble Cedex 9, France

L'objectif de l'échantillonnage efficace est de minimiser le nombre de points de mesures pour la reconstruction d'une image à résolution donnée. L'échantillonnage efficace en tomographie classique est généralisé à la transformée de Radon invariante par rotation dans le cas de fonctions poids polynômiales. Des reconstructions numériques et l'application à l'imagerie Doppler dans des cas particuliers d'inclinaison de l'étoile, illustrent ce résultat.

Échantillonnage efficace en imagerie Doppler

Laurent Desbat⁽¹⁾ et Catherine Mennessier⁽²⁾

⁽¹⁾TIMC-IMAG, UMR CNRS 5525,
IAB, faculté de Médecine, UJF
38706 La Tronche, France

⁽²⁾LAOG, Observatoire de Grenoble,
Université Joseph Fourier BP 53
F-38041 Grenoble Cedex 9, France

Résumé

L'objectif de l'échantillonnage efficace est de minimiser le nombre de points de mesures pour la reconstruction d'une image à résolution donnée. L'échantillonnage efficace en tomographie classique est généralisé à la transformée de Radon invariante par rotation dans le cas de fonctions poids polynômiales. Des simulations numériques et l'application à l'imagerie Doppler dans des cas particuliers d'inclinaison de l'étoile, illustrent ce résultat.

Abstract

A function is said to be efficiently sampled if, for a given resolution, the smallest number of data points is used for its reconstruction. The classical efficient sampling results in tomography are generalized to rotation invariant Radon transform with polynomial weight. Numerical experiments as well as applications to Doppler imaging for two particular stellar inclination angles are presented.

1 Imagerie Doppler

L'imagerie Doppler [7, 15] vise à reconstruire la distribution du flux à la surface d'une étoile en rotation sur elle même. Certaines raies (lithium, calcium...) émises à une longueur d'onde caractéristique λ_0 par cette étoile sont observées à l'aide d'un télescope et d'un spectromètre.

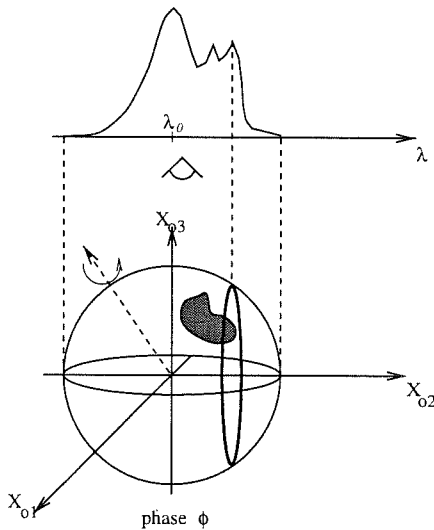


Figure 1: Principe de l'imagerie Doppler : la rotation de l'étoile engendre un décalage spectral par effet Doppler. Ainsi, le signal émis peut être localisé spatialement sur une courbe d'iso-vitesse (iso-décalage Doppler) représentée en trait plein. On montre que les courbes d'iso-vitesse sont des cercles parallèles au plan défini par l'axe de visée et l'axe de rotation de l'étoile.

Du fait de la rotation, la fréquence des raies émises en chacun des points de l'étoile est décalée par effet Doppler. Le décalage est donné par $\Delta\lambda(\phi, \zeta)/\lambda_0 = v(\phi, \zeta)/c_e$ où c_e est la célérité de la lumière et $v(\phi, \zeta)$ est la composante, suivant l'axe de visée o_3 , de la vitesse au point ζ à la surface de l'étoile (par normalisation, la sphère unité) à la phase ϕ . On désigne par o_2 le vecteur unitaire perpendiculaire à o_3 et à l'axe de rotation de l'étoile (s'ils sont confondus, il n'y a pas d'effet Doppler). Soit $d\phi/dt$ la vitesse angulaire, on montre facilement :

$$\begin{aligned} v(\phi, \zeta) &= (d\phi/dt)(\sin \alpha, 0, \cos \alpha)^t \wedge \zeta \cdot o_3 \\ &= (d\phi/dt)\zeta_{o_2} \sin \alpha. \end{aligned}$$

Ainsi, le décalage Doppler est proportionnel à la composante du vecteur ζ sur l'axe o_2 . On appelle courbe d'iso-vitesse l'ensemble des points à la surface de l'étoile qui, pour une position "angulaire" ϕ donnée de l'étoile, engendrent le même décalage Doppler, c'est à dire, ont la même vitesse projetée sur l'axe de visée et donc ont même coordonnée ζ_{o_2} .

Ainsi, on observe une raie élargie par rapport à la raie d'émission d'une étoile qui serait immobile. Un point du spectre (dont l'abscisse représente le décalage en longueur d'onde) est donc caractéristique d'une courbe d'iso-vitesse sur l'étoile (voir Fig. 1).

Soit $V(\phi)$ la demi-sphère visible depuis l'observateur, alors le problème inverse consiste à reconstruire le flux $T(\zeta)$ à partir des mesures :

$$\begin{aligned} m(\phi, \lambda) &= \int_{V(\phi)} H_0(\lambda - \Delta\lambda(\phi, \zeta), T(\zeta)) I_0(T(\zeta)) \\ &\quad \times A_{cb}(\zeta \cdot o_3) \zeta \cdot o_3 d\zeta, \end{aligned}$$

où $A_{cb}(t) = 1 - \epsilon + \epsilon t$ est la fonction d'assombrissement centre-bord, H_0 est le profil intrinsèque de la raie.

En adoptant le modèle à deux températures [1] l'inconnue devient le facteur de remplissage f qui vérifie, après déconvolution [8] par H_0 :

$$m(\phi, s) = H_0(s) * S(\phi, s),$$

$$S(\phi, s) = \int_{\substack{\zeta \cdot o_2 = s \\ \zeta \cdot o_3 \geq 0}} f(\zeta) (1 - \epsilon + \epsilon \zeta \cdot o_3) \zeta \cdot o_3 d\zeta \quad (1)$$

2 Échantillonnage efficace en tomographie classique

Soit \mathbf{K} le support essentiel de la transformée de Fourier d'une fonction à échantillonner suivant un schéma engendré par une matrice non singulière W , c'est à dire sur l'ensemble de points $\{Wl, l \in \mathbb{Z}^2\}$, la généralisation de la condition d'échantillonnage, sur W , de non recouvrement de Nyquist-Shanon [11] est que les ensembles $\mathbf{K} + 2\pi W^{-t}l$, $l \in \mathbb{Z}^2$ doivent être disjoints deux à deux. Cette généralisation de schémas sur des grilles orthogonales à des schémas sur des treillis est intéressante en tomographie.

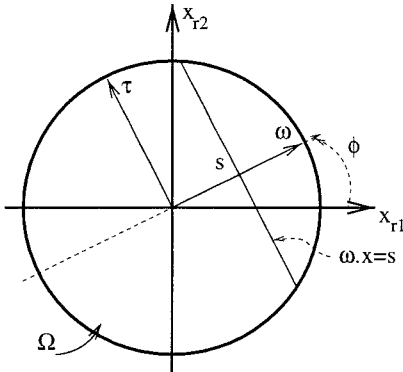


Figure 2: Paramètres de la transformée de Radon.

En tomographie 2D, on cherche à reconstruire une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ à partir de sa transformée de Radon :

$$g(\phi, s) = \int_{\omega \cdot x = s} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau) dt,$$

où $\omega = (\cos \phi, \sin \phi)^t \in S^1$, $\phi \in [0, 2\pi]$, $s \in \mathbb{R}$, voir Fig. 2. On définit les transformées de Fourier 1D et 2D de g et f par :

$$\hat{g}(\phi, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-is\sigma} g(\phi, s) ds,$$

et

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx$$

Le $k^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de $\hat{g}(\phi, \sigma)$ est défini par : $\hat{g}_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \hat{g}(\phi, \sigma) d\phi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si f

est essentiellement b -bande limitée ($\int_{|\xi| > b} |\hat{f}(\xi)| d\xi$ négligeable), le support essentiel de $\hat{g}_k(\sigma)$ est contenu dans l'ensemble [14, 10] :

$$\mathbf{K} = \{(k, \sigma) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}; |\sigma| < b, |k| < \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}$$

où $0 < \vartheta < 1$ est un paramètre de contrôle de la décroissance exponentielle de $|\hat{g}_k(\sigma)|$ en dehors de \mathbf{K} .

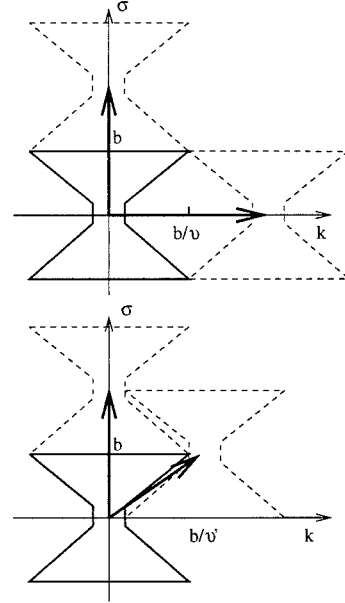


Figure 3: Ensembles $\mathbf{K} + 2\pi W_S^{-t}k$ (gauche) et $\mathbf{K} + 2\pi W_I^{-t}k$ (droite).

Les grilles respectivement standard et entrelacée sont alors engendrées par les matrices W_S et W_I suivantes :

$$W_S = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{P} & 0 \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{pmatrix} \quad W_I = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{P} & \frac{-\pi}{P} \\ 0 & \frac{2}{Q} \end{pmatrix}$$

où le nombre de points d'échantillonnage P de la variable angulaire et le nombre de points d'échantillonnage Q par projection satisfont : $b \leq P\vartheta$, $b \leq \pi Q/2$ pour la grille W_S et $b \leq P\vartheta'$, $b \leq \pi Q/2$ pour la grille W_I (voir figure 3). Alors, les valeurs optimales de P et Q sont : $\pi Q/2 = b$, $2P = \pi Q/\vartheta$ pour W_S et $\pi Q/2 = b$, $2P = \pi Q/\vartheta'$ pour W_I (voir figure 3). On notera que $\det W_I \approx 2\det W_S$, c'est à dire que la grille entrelacée est presque deux fois plus efficace que la grille standard pour échantillonner la transformée de Radon 2D d'une fonction.

Les géométries entrelacées ont été introduites par Cormack à l'aide d'arguments géométriques très élégants [3]. Les conditions d'échantillonnage efficace pour les géométries en éventail sont dues à Natterer [10]. Des schémas efficaces moins réguliers ont été proposés par Faridani dans [5, 6], voir aussi [4].

3 Transformée de Radon généralisée invariante par rotation et imagerie Doppler

La transformée de Radon 2D invariante par rotation est définie par :

$$g(\phi, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)w(s, t)dt,$$

Proposition 1 Si la fonction poids $w(s, t)$, associée à la transformée de Radon généralisée g de f , est un polynôme de degré $L + M$ en s et t , $w(s, t) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} s^l t^m$, si $\forall l \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{Z}$, tels que $l \leq L, m \leq M$ et $-l - m \leq n \leq l + m$, la fonction $f(x)|x|^{l+m}e^{-in\psi}$ (avec $(|x|, \psi)$ coordonnées polaires de $x \in \mathbb{R}^2$) est essentiellement b -bande limitée, alors le support essentiel de $\hat{g}_k(\sigma)$ est contenu dans :

$$K = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < (L+M) + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

Démonstration: D'après le théorème coupe-projection :

$$\begin{aligned} \hat{g}_k(\sigma) &= (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} \int_{x \in \mathbb{R}^2} e^{-i\sigma\omega \cdot x} f(x) w(x \cdot \omega, x \cdot \tau) dx d\phi \\ &= (2\pi)^{\frac{-3}{2}} \int_{x \in \mathbb{R}^2} f(x) e^{-ik\psi} I(x) dx \end{aligned}$$

avec

$$I(x) = \int_0^{2\pi} e^{-i\sigma|x|\cos\eta - ik\eta} w(|x|(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}), |x|(\frac{e^{-i\eta} - e^{i\eta}}{2i})) d\eta,$$

où $x = |x|(\cos\psi, \sin\psi)^t$ et $\eta = \phi - \psi$. Si $w(s, t) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} s^l t^m$, alors en remarquant qu'il existe $c_n \in \mathbb{C}$, $-l - m \leq n \leq l + m$ tel que

$$\left(\frac{e^{i\eta} + e^{-i\eta}}{2}\right)^l \left(\frac{e^{-i\eta} - e^{i\eta}}{2i}\right)^m = \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} c_n e^{in\eta}$$

et en utilisant la relation VII(3.16) dans [10] :

$$J_k(x) = \frac{i^{-k}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \phi - ik\phi} d\phi$$

nous obtenons

$$\hat{g}_k(\sigma) = \sqrt{2\pi} \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} u_k^{n,l,m}(\sigma)$$

avec

$$u_k^{n,l,m}(\sigma) = \int_{x \in \mathbb{R}^2} c_n f(x) |x|^{l+m} e^{-i(k-n+n)\psi} i^{k-n} J_{k-n}(-\sigma|x|) dx.$$

Ainsi, $h^{n,l,m}(x)$ étant définie par :

$$h^{n,l,m}(x) = f(x) |x|^{l+m} c_n e^{-in\psi}$$

on note y , la transformée de Radon classique de $h^{n,l,m}$:

$$y_{n,l,m}(\phi, s) = \int_{x \cdot \omega = s} h^{n,l,m}(x) dx$$

alors, d'après l'égalité p.72 dans [10]

$$\hat{g}_k(\sigma) = \sum_{l,m=0}^{L,M} a_{l,m} \sum_{n=-(l+m)}^{l+m} (\widehat{y_{n,l,m}})_{k-n}(\sigma).$$

On en déduit le support essentiel de $\hat{g}_k(\sigma)$ donné dans la proposition. \square

Pour illustrer la proposition précédente nous représentons dans la figure 4, $|\hat{g}_k(\sigma)|$ pour la transformée de Radon classique ($w(s, t) = 1$) de l'indicatrice d'un disque centré en $(0.8, 0)$ de rayon 0.03 (en haut) et $|\hat{g}_k(\sigma)|$ pour la transformée de Radon généralisée, avec $w(s, t) = t^{10}$, de la même indicatrice de disque (en bas). Un élargissement de spectre suivant l'axe horizontal k pour $w(s, t) = t^{10}$ par rapport à $w(s, t) = 1$ est bien visible, en particulier dans les agrandissements. On remarquera que la fonction f n'est pas essentiellement b -bande limitée et donc ne remplit pas les conditions du théorème. Cependant, le résultat reste numériquement vérifié.

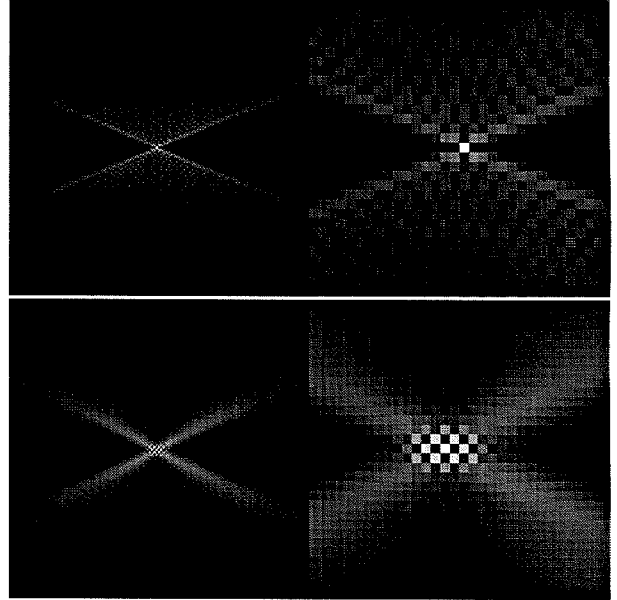


Figure 4: Visualisation de $|\hat{g}_k(\sigma)|$ pour les fonctions poids $w(s, t) = 1$ (en haut) et $w(s, t) = t^{10}$ (en bas). Dans la colonne de droite un grossissement de la partie centrale souligne l'élargissement de spectre suivant l'axe horizontal k .

3.1 Imagerie Doppler à inclinaison nulle

C'est un cas d'école puisque, pour tout point de l'étoile, la composante de son vecteur vitesse sur l'axe de visé est nulle et donc, le décalage Doppler qui lui est proportionnel, est nul. Cependant, la géométrie des mesures permet d'identifier, par simple projection des courbes d'iso-vitesse sur le plan du ciel (plan perpendiculaire à l'axe de visé), un problème de transformée de Radon classique. Il suffit de remplacer dans (1) ω_2 par ω et de faire le changement de variable $\zeta = (x_1, x_2, \sqrt{1 - (x_1^2 + x_2^2)}) = (x, \sqrt{1 - |x|^2})$ pour se ramener dans le plan du ciel à la transformée de Radon de $f(x)(1 - \epsilon + \epsilon\sqrt{1 - |x|^2})$. Ainsi, l'échantillonnage entrelacé peut être appliqué.

3.2 Imagerie Doppler à inclinaison à 90°

Dans le cas où l'axe de rotation de l'étoile est σ_1 , tout point est visible pendant une demi-période. Du fait qu'un point et son symétrique par rapport à l'équateur de l'étoile se trouvent toujours sur la même courbe d'iso-vitesse, on ne pourra pas les distinguer l'un de l'autre : c'est l'ambiguïté nord-sud [9]. Les fonctions antisymétriques sont invisibles, c'est à dire dans le noyau de l'opérateur. Ainsi, l'identification se limite à la partie symétrique de la fonction flux recherchée. En introduisant $g^+(\phi, s) = S(\phi, s) + S(\phi + \pi, -s)$ et en projetant les courbes d'iso-vitesse dans le plan équatorial (plan fixe perpendiculaire à l'axe de rotation), on montre que la mesure est celle d'une transformée de Radon généralisée avec pour fonction poids $w(s, t) = (1 - \epsilon)|t| + \epsilon t^2$. Ne sachant pas traiter le cas de $|t|$ du point de vue de l'échantillonnage, la valeur de ϵ est fixée à 1, d'où :

$$\begin{aligned} g(\phi, s) &= \int_{x \cdot \omega = s} f(x)(x \cdot \tau)^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)t^2 dt \end{aligned}$$

Comme dans [2, 12, 13], en décomposant f en harmoniques sphériques, on peut montrer qu'elle est identifiable à partir de $g^+(\phi, s)$.

Pour $\epsilon = 0$, une transformée de Radon avec une fonction poids polynômiale est obtenue en définissant la mesure par : $g^-(\phi, s) = S(\phi, s) - S(\phi + \pi, -s)$. L'équation précédente devient :

$$\begin{aligned} g^-(\phi, s) &= \int_{x \cdot \omega = s} f(x)x \cdot \tau dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(s\omega + t\tau)t dt. \end{aligned}$$

De même il est possible de montrer que toutes les harmoniques de f , exceptée l'harmonique zéro, sont identifiables à partir de $g^-(\phi, s)$. La partie radiale de f peut alors être reconstruite à partir d'une seule projection $S(\phi, s)$ à laquelle aura été soustraite la composante non radiale, alors identifiée. Dans un schéma entrelacé, il suffira de prendre les données de deux projections successives pour obtenir, sur la partie radiale, la même résolution que sur la partie non radiale. Ainsi l'échantillonnage entrelacé est suffisant pour reconstruire efficacement f .

On déduit donc facilement de la proposition du paragraphe précédent que le support de

- $\widehat{g^+}_k(\sigma)$, pour $\epsilon = 1$, est contenu dans

$$\mathbf{K}_{DI} = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < 2 + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

- $\widehat{g^-}_k(\sigma)$, pour $\epsilon = 0$, est contenu dans

$$\mathbf{K}_{DI} = \{(k, \sigma); |\sigma| < b, |k| < 1 + \max(|\sigma|/\vartheta, (1/\vartheta - 1)b)\}.$$

Références

- [1] A.C. Cameron. Surface inhomogeneities on late-type stars. In Mullan D.J. Byrne P.B., editor, *Surface Inhomogeneities on Late-Type Stars*, pages 33–44. Springer, 1992.
- [2] A.M. Cormack. Representation of a Function by Its Line Integrals, with Some Radiological Applications. *J. Appl. Phys.*, 34:2722–2727, 1963.
- [3] A.M. Cormack. Sampling the Radon transform with beams of finite width. *Phys. Med. Biol.*, 23(6):1141–1148, 1978.
- [4] L. Desbat. Efficient sampling on coarse grids in tomography. *Inverse Problems*, 9:251–269, 1993.
- [5] A. Faridani. An application of a multidimensional sampling theorem to computed tomography. In *AMS-IMS-SIAM Conference on Integral Geometry and Tomography*, volume 113, pages 65–80. Contemporary Mathematics, 1990.
- [6] A. Faridani. A generalized sampling theorem for locally compact abelian groups. *Math. Comp.*, 63(207):307–327, 1994.
- [7] A.V. Goncharsky, V.V. Stepanov, V.L. Khokhlova, and A.G. Iagola. Mapping of chemical elements on the surfaces of ap stars. i solution of the inverse problem of finding local profiles of spectral lines. *Soviet Astronomy*, 26:690–696, 1982.
- [8] D.F. Gray. *The observation and analysis of stellar photospheres*. Wiley and Sons, 1976.
- [9] M. Kürster. Doppler imaging with a clean-like approach. *Astronomy and Astrophysics*, 274:851–869, 1993.
- [10] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [11] D.P. Petersen and D. Middleton 1962. Sampling and reconstruction of wavenumber-limited functions in N-dimensional euclidean space. *Inf. Control*, 5:279–323, 1962.
- [12] E.T. Quinto. The Inversibility of Rotation Invariant Radon Transforms. *J. Math. Anal. Appl.*, 91:510–522, 1983.
- [13] E.T. Quinto. The Inversibility of Rotation Invariant Radon Transforms (erratum) . *J. Math. Anal. Appl.*, 94:602–603, 1983.
- [14] P.A. Rattey and A.G. Lindgren. Sampling the 2-D Radon transform. *IEEE Trans. ASSP*, 29:994–1002, 1981.
- [15] S.S.Vogt. Doppler images of rotating stars using maximum entropy image reconstruction. *The Astrophysical Journal*, 321:496–515, 1987.

Conclusion

Le premier chapitre nous a conduit à établir clairement les liens existants entre l'imagerie Doppler et la tomographie généralisée. Cette démarche a permis de mettre en évidence une difficulté importante en imagerie Doppler : la non-unicité des solutions liée à l'existence de fonctions radiales du noyau à tous les angles d'inclinaison de l'axe de rotation de l'étoile sur l'axe de visée. Le traitement numérique, bien qu'il requerrait une analyse plus méthodique et plus fine, a révélé la nature de l'ambiguïté liée à ce noyau. De même l'instabilité a été étudiée de manière qualitative. En poursuivant plus loin l'analogie avec la tomographie nous avons établi, pour deux cas particuliers de l'inclinaison, une géométrie d'échantillonnage efficace. D'une manière plus générale, nous avons montré que l'échantillonnage entrelacé s'appliquait à la transformée de Radon invariante par rotation avec fonctions poids polynômiales.

Le parallèle conduit entre l'imagerie Doppler et la tomographie n'est sans doute intéressant que s'il est poursuivi. En particulier étendre les résultats de la tomographie sur la stabilité des opérateurs (obtenus par décomposition en valeurs singulières) permettrait de donner avec précision ce qui est identifiable à partir de mesures bruitées ou incomplètes en phase. De même la surjectivité n'a pas été abordée. Or en tomographie classique on connaît les conditions que doivent vérifier les projections pour appartenir à l'image de l'opérateur. En théorie, la connaissance de ces critères peut permettre, par exemple si le nombre de données est insuffisant, d'interpoler les mesures avec la contrainte supplémentaire que les "nouvelles mesures" vérifient la condition d'appartenance à l'image de l'opérateur.

Nous avons établi des limites fondamentales de l'imagerie Doppler. Elle reste cependant une technique indirecte de cartographie de l'activité d'une étoile à sa surface, très riche en information. Son usage *averti* se justifie pleinement par les enjeux astrophysiques auxquels elle apporte des éléments de réponse. L'objet de la partie suivante est ainsi de mettre en avant la contribution des reconstructions par imagerie Doppler dans la compréhension des phénomènes physiques. Soulignons d'emblée que cette seconde partie n'a pas été la priorité de notre travail et demande une étude plus approfondie. Elle se veut avant tout une introduction à l'étude de l'activité des jeunes objets T Tauri. Dans le premier chapitre une description phénoménologique de l'activité magnétique stellaire est résumée. Le second

chapitre est l'application de l'imagerie Doppler à l'étude d'un objet réel, SU Aur. Nous esquissons une interprétation des observations.

Deuxième partie

Enjeu de l'imagerie Doppler et application à l'étoile T Tauri : SU Aurigae

Chapitre 1

Champ magnétique à la surface des étoiles

Sommaire

1.1 Le soleil comme paradigme de l'activité magnétique stellaire	134
1.1.1 Description phénoménologique	134
1.1.2 Quelques éléments d'explication de l'activité	136
1.2 Signature du champ magnétique dans les T Tauri	138
1.2.1 Définition et propriétés des T Tauri	138
1.2.2 Indices de l'activité magnétique des T Tauri	141
1.2.3 Quelques modèles existants	144

A cette date, le soleil n'est plus l'unique étoile dont la surface a pu être résolue. En effet en mars 1995, la première image directe de Betelgeuse a été obtenue avec le HST [62]. Il reste cependant l'objet le plus facilement observable et par là, sans doute la source la plus riche en enseignement sur le rôle joué par le champ magnétique dans l'évolution stellaire. Cependant comme le rappelait Schrijver dans son exposé sur le champ magnétique à la surface du soleil [125], les contraintes sur les modèles sont apportées tant par la connaissance de fins détails, que seule est susceptible d'apporter l'observation du soleil, que par les observations d'autres étoiles. Ces dernières offrent les caractéristiques d'objets couvrant une large gamme sur les âges, les compositions chimiques, les taux de rotation, les masses... C'est pourquoi, conclut-il, "Because of the complementarity, only a combined study of Sun and stars can provide the conceptual framework and the qualitative as well as quantitative details that are crucial if we are to increase our understanding of stellar magnetic activity". Dans cette perspective, nous présentons brièvement les phénomènes qui

manifestent la présence du champ magnétique. Nous mentionnons également la dynamo en tant que modèle conciliant le mieux la physique des phénomènes aux observations. Dans une seconde partie, après une introduction aux étoiles TTauri, nous énumérons les indices de leur activité et situons l'enjeu de l'imagerie Doppler.

1.1 Le soleil comme paradigme de l'activité magnétique stellaire

1.1.1 Description phénoménologique

Ce qui suit est tiré, pour l'essentiel, du cours de structure interne [83] mais aussi de [20, 124, 128].

Les taches et le cycle solaire

Les manifestations les plus évidentes de l'activité magnétique du soleil sont sans doute les taches qui couvrent sa surface (voir Fig. 1.1). Elles ont été observées de longue date puisque déjà Galilée les avait repérées. Malheureusement, à cette époque où l'on découvrait également la lunette astronomique, le cycle des taches disparut à peu près complètement (minimum de Maunder). Aussi, ce n'est qu'en 1857 que le cycle de 11 ans fut découvert par Schwabe, que récompensa la "Royal Astronomical Society" [5]. Il faudra attendre le début du siècle pour que, suite à la découverte de l'effet Zeeman (1896), Hale (1908) mette en évidence la présence d'un champ magnétique dans les taches solaires. En effet sous l'action de celui-ci, un niveau électronique se décompose en $2J+1$ sous-niveaux équidistants. L'écart en énergie de ces niveaux est proportionnel au champ magnétique et est déterminé par le facteur de Landé du niveau. Dans le cas d'observations longitudinales (propagation de la lumière parallèlement au champ), seules les composantes circulaires σ existent. Dans le cas d'observations transversales (propagation de la lumière perpendiculairement au champ), les composantes circulaires sont de part et d'autre des composantes π polarisées rectilignement. L'effet Zeeman induit une séparation

$$\Delta\lambda = 4.67 \cdot 10^{-13} \lambda^2 g B \quad (\text{\AA})$$

entre le groupe central de composantes π et le centroïde de composantes σ^+ ou σ^- (polarisation circulaire droite ou gauche).

Les taches "sont les grains de beauté du soleil. Elles demeurent encore aujourd'hui un mystère sans doute parce que leur simplicité n'est qu'apparente et cache une multitude de détails (...)" [5]. Une tache solaire est formée de l'ombre, en son centre, entouré de la

1. Le vecteur \vec{J} est la somme du moment magnétique orbital de l'atome et du moment magnétique de spin.

pénombre. Le champ magnétique atteint une valeur de 3 kG au centre alors qu'il n'est

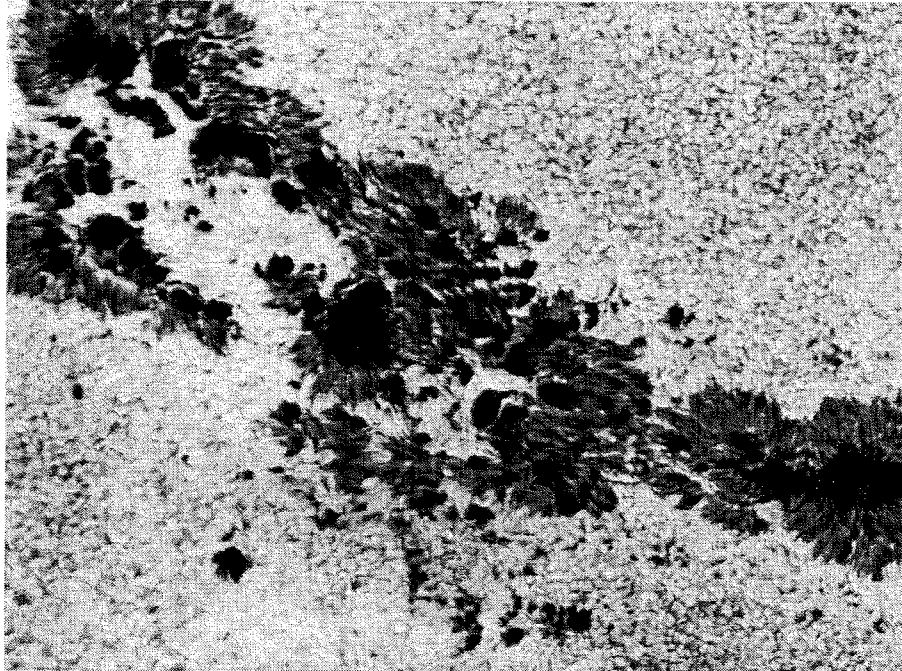


FIG. 1.1 – *Le soleil manifeste son activité magnétique par le cycle de taches. Les taches sont des régions de température plus basse que la photosphère dont elles se trouvent à plusieurs centaines de kilomètres en dessous ². Biermann (1941) suggéra qu'elles étaient dues à l'inhibition des mouvements de convection par un fort champ magnétique: la matière n'étant alors plus brassée vers l'intérieur plus chaud de l'étoile, elle refroidit en surface.*

que de l'ordre de 50 à 500 G sur le reste de la photosphère [125]. La durée de vie d'une tache est de l'ordre de deux à trois rotations solaires, c'est à dire de quelques jours à quelques mois pour les plus importantes. Les taches sont relativement froides par rapport à la photosphère environnante. Biermann (1941) suggéra que ceci était dû à l'inhibition de la convection par le champ magnétique: la matière qui n'est plus brassée avec l'intérieur plus chaud, se refroidit. La profondeur optique $\tau = 1$ ² peut se trouver de 600 à 1000 km plus enfoncée dans une tache que dans la photosphère normale. Les taches sont surtout un élément de base du cycle solaire, en lui même très mal compris. Les magnétogrammes mettent en évidence la structure dipolaire qui leur est associée: sur un hémisphère, tous les dipôles ont même direction et la direction dans l'hémisphère nord sera l'opposée de celle dans l'hémisphère sud. Tous les 11 ans, la situation s'inverse. L'axe joignant deux taches d'une même paire est incliné de 10° par rapport à l'équateur. Sur la même échelle de temps, Carrington a montré que les taches naissent à des latitudes de plus en plus basses:

2. La surface correspond au lieu des points où la profondeur optique vaut $\tau = 1$.

au début du cycle elles sont peu nombreuses et se situent, en moyenne, à la latitude 28° , tandis que 11 ans après, la moyenne tombe à 7° et le nombre de taches est maximal.

Autres indicateurs de la présence du champ magnétique

L'activité se manifeste aussi par d'autres indicateurs. Par exemple, sous l'impact de rayons cosmiques dans l'atmosphère, des éléments radioactifs sont produits et incorporés dans les végétaux (^{14}C) ou les couches glaciaires (^{10}Be). Or le flux de rayons cosmiques dépend du champ magnétique global du soleil. Ainsi, en datant l'abondance des éléments radioactifs, il est possible de mesurer les variations de l'activité solaire. On retrouve par exemple apériodiquement, mais sur une base de 200 ans, un abaissement de l'activité au minimum de Maunder.

Au dessus de la photosphère le champ magnétique se manifeste par les plages, régions brillantes de la chromosphère, et par des boucles magnétiques qui confinent le plasma au niveau de la couronne. Ceci explique la présence de raies d'émission d'éléments très ionisés dans le spectre solaire : la chromosphère et la couronne sont le siège de phénomènes très énergétiques qui mettent en jeu des mécanismes magnétohydrodynamiques. Entre autre, on observe au centre des raies H et K du calcium une fois ionisé (Ca II), un pic d'émission caractéristique de la remontée en température de la chromosphère. La raie H_α joue également un rôle primordial pour l'étude du soleil. Par exemple, elle est la signature des plages et des éruptions : la raie apparaît alors en émission et son intensité dépend de celle de la protubérance (voir [124] p.118 et [128] p.255). L'émission de rayons X signale la présence d'une couronne très chaude. Pour une revue des phénomènes éruptifs, on pourra se reporter au chapitre "Physique du phénomènes éruptif" du cours d'Aussois : "production et rôle du champ magnétique" [80].

1.1.2 Quelques éléments d'explication de l'activité

Ce que nous venons de décrire indique la présence d'un champ magnétique à la surface du soleil. Qu'en est-il à l'intérieur de l'étoile et quel rôle joue-t-il dans la structure interne et l'évolution de l'étoile? C'est un peu ce à quoi le modèle dynamo tente de répondre : un champ magnétique primordial est amplifié par l'interaction de mouvements turbulents de la zone convective avec la rotation. Les deux ingrédients principaux du magnétisme solaire sont en effet la rotation et la convection [83, 20]. Le champ magnétique observé en surface ne fait que traduire des phénomènes qui se déroulent sur des couches plus profondes du soleil. L'image courante est la suivante : considérons un tube de flux magnétique, celui-ci ne peut rester immergé. En effet, la pression du gaz à l'intérieur du tube et donc la densité, étant plus faible qu'à l'extérieur, le tube monte sous la poussée d'Archimède et traverse la zone convective. Ce tube est cependant maintenu en profondeur par l'impact de globules de fluides (de la zone convective) qui sont animés de mouvements descendants, vers la

région située immédiatement sous la zone de convection. Ainsi sous l'effet de ces deux forces, une boucle se forme, maintenue par des pieds ancrés sous la zone convective. Ceci se traduit par la formation d'une paire de taches, à l'intersection de la surface et de la boucle.

Le modèle dynamo met en présence des mouvements convectifs ayant une certaine hélicité² (effet $\alpha-\omega$). Or l'hélicité n'est possible que si la rotation est suffisante par rapport au temps de montée des globules.³ Par conséquent, la rotation et en particulier la rotation différentielle, joue un grand rôle. Avant l'héliosismologie, seule la rotation différentielle en surface était mesurée grâce à l'observation du mouvement de structures magnétiques ou de matière. La différence des périodes aux pôles et à l'équateur donne un ordre de grandeur du taux de rotation différentielle : la période est de l'ordre de 26 jours au niveau de l'équateur, et de 37 jours au niveau des pôles. Plusieurs indices suggèrent de même que, pour le soleil, la rotation est plus importante vers les couches internes. Ainsi, comme les taches s'enfoncent verticalement sous la photosphère et sont ancrées à la profondeur où naît le champ, la rotation différentielle du soleil se traduit par la migration des taches des latitudes intermédiaires vers l'équateur, (vers les pôles, pour d'autres étoiles). Par ailleurs, le fait que la rotation du soleil croît vers l'intérieur permet d'expliquer que les taches tournent, à latitude donnée, plus vite de 1 à 2 %, que la photosphère avoisinante.

Malgré des progrès incessants qui sont faits dans la compréhension des mécanismes d'activité du soleil, les thèses avancées sont loin de tout expliquer. Ainsi, nous concluons en citant ce que Schatzman [83] soulignait dans son introduction au cours d'Aussois de 1992 : "Les résultats de l'héliosismologie sur la rotation ne permettent pas de dire s'il y a en effet du champ magnétique à l'intérieur du Soleil, même grâce à la théorie de l'effet dynamo, le mouvement d'apparition des taches des latitudes moyennes vers l'équateur solaire est mal compris". Sous cet angle, l'incertitude sur les modèles qui s'appliquent à rendre compte de l'activité magnétique sur d'autres étoiles que le soleil, se comprend largement.

2. La quantité $\mathbf{u}' \cdot (\nabla \wedge \mathbf{u}')$ est appelée hélicité du champ de vitesse du fluide. Une valeur non nulle signifie que la vorticité $(\nabla \wedge \mathbf{u}')$ tend à tourner de façon prédominante dans un sens ou dans un autre autour de la direction de la vitesse c'est à dire que le champ de vitesse n'est pas symétrique par rapport à un plan.

3. Le nombre de Rossby, définit comme le rapport des forces d'inertie à la force de Coriolis [124], doit être suffisamment petit pour qu'il y ait effet dynamo. Il peut être approché par le rapport des deux temps caractéristiques : temps de remontée des globules et rotation. Il est donc un indicateur qualitatif de l'activité, les étoiles les plus actives ayant un nombre de Rossby minimal.

1.2 Signature du champ magnétique dans les T Tauri

La compréhension du rôle du champ magnétique tant dans les mécanismes d'évolution stellaire que dans l'interaction d'une étoile avec son environnement, s'enrichit de nouvelles observations. Les naines blanches et les systèmes RS CVn (voir par exemple [51] pour une définition et un résumé de leurs propriétés) furent les deux premiers groupes stellaires où, grâce aux satellites d'observations en UV (IUE) et X (EINSTEIN) on reconnut une activité magnétique de type solaire. Les étoiles T Tauri, qui doivent leur nom à la première qui fut découverte (1852), restent d'un accès difficile parce qu'elles sont éloignées et de plus subissent une forte extinction du fait de leur environnement. L'exotisme des phénomènes qu'elles manifestent oblige à concevoir des mécanismes un peu différents de ceux établis pour le soleil.

Après l'énumération de ce qui les caractérise et de leurs principales propriétés, nous rappelons quelques uns des indices qui trahissent une activité magnétique importante. Des modèles qui tentent de rendre compte des phénomènes mis en jeu sont ensuite présentés. Pour un résumé des propriétés des T Tauri, on pourra se reporter aux articles et ouvrages [20, 4, 87, 15, 11].

1.2.1 Définition et propriétés des T Tauri

Dans cette partie nous donnons les critères qui permettent de classer une étoile parmi les T Tauri. Les caractéristiques de leur spectre et de la répartition de leur énergie sont ensuite dégagées.

Qu'est-ce qu'une T Tauri?

Les T Tauri sont des étoiles très actives, préséquence principale, jeunes de moins d'un million d'années. Parmi les arguments laissant supposer leur jeunesse, les deux principaux sont : (1) l'association que ces étoiles entretiennent avec le nuage qui les entoure et leur a donné naissance, (2) l'abondance du lithium dans leur atmosphère (voir par exemple [4] pour une revue de leurs propriétés). Ces étoiles se trouvent dans les régions de formation dont les plus typiques sont les nuages moléculaires du Taureau (150 pc), d'Orion (420 pc) et Rho Ophiucus (150 pc). Le flot, le disque et l'enveloppe circumstellaire de certaines sources du Taureau (FS Tau B, DG Tau, HH 30... [130]), ont pu être résolus par le télescope spatial Hubble ou grâce à l'optique adaptative, Fig 1.2.

Les premiers critères sur lesquels est établie l'appartenance d'une étoile au groupe T Tauri, ont été proposés en 1945 par Joy. C'est toutefois à Herbig que l'on doit ceux qui aujourd'hui encore définissent cette classe d'objets jeunes. Le spectre d'une T Tauri est marqué par la présence :

- des raies de Balmer et des raies du Ca II H et K dans le spectre d'émission,

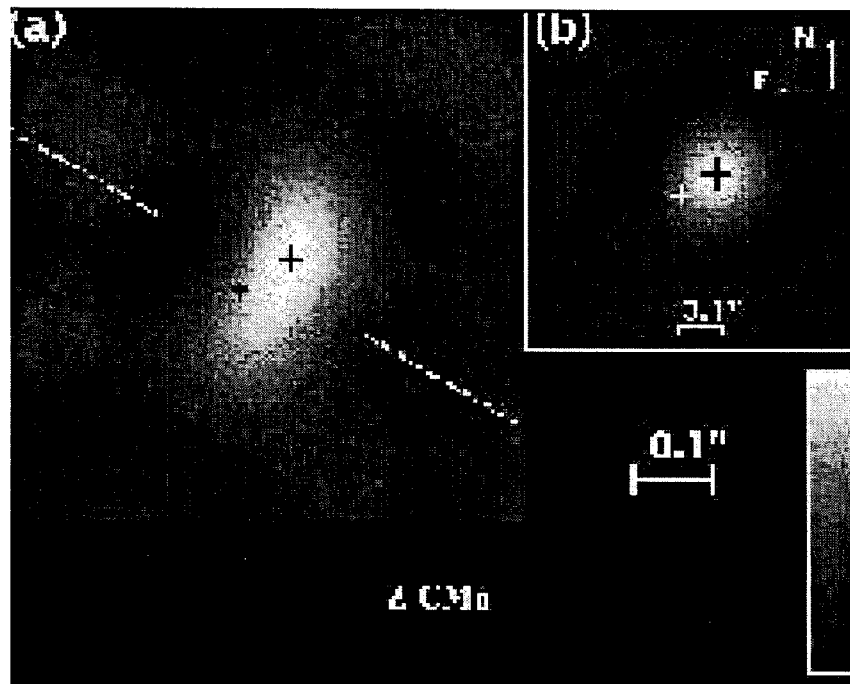


FIG. 1.2 – Cette image a été obtenue sur un télescope de l'ESO d'un diamètre de 3.6m, en optique adaptative. Une structure vue en émission, d'une envergure d'environ 400 AU, a été détectée en IR autour de l'étoile T Tauri Z CMa [98]. Perpendiculairement à la structure allongée, on distingue un jet. F. Malbet et al. interprètent ces observations comme résultant de l'illumination d'un disque par la source IR.

- des raies à 4063 Å et 4132 Å du Fe,
- des raies interdites comme [O I], [S I],
- d'une forte absorption dans la raie du Li I à 6708 Å.

La classe des T Tauri (TTS) dites classiques (CTTS) est à distinguer de celle des TTS dites à faibles raies d'émission (WTTS), dont le disque circumstellaire froid aurait quasiment disparu.

Quelques propriétés

Une T Tauri est une étoile de faible masse, inférieure à trois masses solaires, d'un rayon de l'ordre de deux à trois rayons solaires. Elle est entièrement convective, en contraction gravitationnelle et est entourée d'un disque d'accrétion où sont susceptibles de se former des planètes. Les TTS se distinguent par un spectre d'émission de type solaire mais très prononcé, et par leur spectre d'énergie un peu particulier. Les caractéristiques de ce

spectre traduisent l'interaction de l'étoile avec son environnement mais aussi son activité magnétique intrinsèque.

LE SPECTRE d'absorption photosphérique d'une T Tauri est typiquement celui d'une K7. Son type spectral tardif varie en fait de G à M. À ce spectre s'ajoute un plus ou moins grand nombre de raies en émission : *les raies du Ca II, H et K, de l'He I, des raies métalliques Fe II, Ti II*. Le flux de la composante en émission des raies K du Ca II et He I, dépend directement du champ magnétique. En effet, ces raies sont probablement formées dans les régions de plages et ainsi sont des indicateurs d'un champ magnétique important [126, 9, 141]. *Les raies interdites* [31] et les profils des *raies de Balmer*, extrêmement variables et complexes, indiquent la présence d'un vent stellaire. Ce vent est cependant trop ténu pour donner naissance aux flots moléculaires qui sont associés aux sources enfouies⁴. De plus, certaines étoiles présentent une composante en absorption, à des vitesses de l'ordre de 200 à 400 km s⁻¹, dans l'aile rouge de l'émission de raies de Balmer. Ces profils sont dits P Cygni-inverses et sont interprétés comme la signature de phénomènes d'accrétion⁵ de matière, de l'enveloppe ou du disque vers l'étoile [7]. Un exemple type est la classe des étoiles YY Orionis [14].

LA DISTRIBUTION D'ÉNERGIE caractérise également les T Tauri. L'excès dans le *domaine IR* (pour les CTTS seulement) est attribué à la présence d'un disque circumstellaire de poussière (enveloppe dont se seraient affranchies les WTTS). L'excès *UV*, observé dans les CTTS uniquement, peut s'expliquer par une couche limite entre le disque et l'étoile c'est à dire, par la friction de la matière, en rotation différentielle, qui donnerait lieu à une dissipation d'énergie. Nous verrons plus loin qu'il existe d'autres alternatives à cette interprétation. L'émission dans le *domaine des rayons X* est de l'ordre de 10³ fois celle qui a cours dans le soleil [8] et est extrêmement variable (variabilité de l'ordre de la minute). Elle a conduit T. Montmerle [102] à la comparer aux lampes d'un sapin de Noël. Elle indique une température très élevée de la couronne. Cette émission est corrélée avec la rotation [21], ce que prédit la théorie dynamo qui invoque la présence d'un fort champ magnétique en surface venant chauffer la couronne. Dans sa thèse [20] J. Bouvier conclut que la relation entre intensité de l'émission X et efficacité du processus de dynamo à laquelle obéissent les T Tauri est semblable à celle observée sur les étoiles de type solaire. C'est ainsi qu'au vu du rayonnement X, le champ magnétique des WTTS se révélerait plus important que celui des CTTS. Remarquons que, si le rayonnement X donne une idée de l'activité de l'étoile, il faut toutefois se tourner vers d'autres techniques pour évaluer quantitativement la valeur de ce champ. Nous verrons dans la section suivante qu'il est estimé de l'ordre de quelques kilogauss [74]. Quant à la variabilité, elle indiquerait des

4. La source VLA 1623 montre, par exemple, un flot parfaitement collimaté et rectiligne. Ces flots sont souvent associés à des régions de gaz plus chaudes tels les objets d'Herbig-Haro [117].

5. Le taux d'accrétion serait de l'ordre de 10⁻⁸ à 10⁻⁶ M_⊙/an.

phénomènes éruptifs [102, 103]. Dans *le domaine radio*, peu d'étoiles ont été détectées. Néanmoins, comme souligné par P. André, la non détection d'émission radio ne signifie pas pour autant l'absence de champ magnétique. En effet, le vent ionisé des CTTS pourrait absorber tout flux radio d'origine non thermique, produit près de la surface de l'étoile. L'émission radio de DG Tau est interprétée par l'émission thermique d'une enveloppe de gaz ionisé alors que sur d'autres TTS elle est interprétée en termes d'éruption et donc aurait une origine magnétique [37].

1.2.2 Indices de l'activité magnétique des T Tauri

Les CTTS ont un taux de rotation légèrement plus faible que les WTTS [26]. Une explication aujourd'hui avancée est que les CTTS seraient couplées à un disque tournant plus lentement, *via* la magnétosphère [91]. Du fait de flux en rayon X et du taux de rotation plus important sur les WTTS que sur les CTTS, certains émettent l'hypothèse que le champ magnétique des WTTS serait plus fort que celui des CTTS. D'aucuns supposent, du fait de la ressemblance des deux classes, qu'il serait du même ordre de grandeur [74].

Estimations quantitatives

La mesure directe du champ magnétique sur les T Tauri reste à l'heure actuelle une exception. À cette date, seule une limite supérieure de la valeur du champ magnétique a été avancée. Il existe essentiellement deux méthodes pour l'évaluer : par mesure de la séparation des raies due à l'effet Zeeman, ou par mesure de l'élargissement des raies sous l'effet du champ magnétique (voir [73] pour un résumé des deux techniques).

La première méthode consiste à mesurer la séparation des deux composantes opposées de polarisation circulaire. Cette technique permet d'estimer la composante longitudinale du champ. La difficulté tient au fait que la mesure est issue de l'intégrale, sur le disque, de la valeur algébrique du champ. Ainsi si le champ est organisé en une multitude de dipôles, les pôlarités s'annulent deux à deux. C'est ainsi que le champ magnétique à la surface du soleil, bien que de plusieurs milliers de gauss, ne serait pas détecté par des mesures de polarimétries. La mesure de polarisation circulaire ne peut donc s'appliquer qu'aux étoiles dont le champ magnétique est organisé à grande échelle (étoiles Ap, naines blanches...). Des tentatives sur des TTS ont été faites mais ce sont soldées par des échecs comme le montre l'exemple de RU Lup [86].

La seconde méthode utilise l'élargissement des raies par le champ magnétique : la raie élargie est le convolué de la raie peu ou pas élargie par une fonction dépendant de l'aire occupée par les régions magnétiques à la surface de l'étoile. La difficulté est qu'il existe d'autres sources d'élargissement dont les deux principales sont : les phénomènes de turbulence dans l'atmosphère de l'étoile et la rotation de l'étoile sur elle même. Pour éviter cette dernière cause d'élargissement, les objets sélectionnés sont, en priorité, ceux dont

le v_{ini} est négligeable devant l'élargissement dû au champ magnétique. Cet écueil de la méthode peut cependant être contourné en mesurant l'élargissement de raies de facteurs de Landé différents. En effet, l'élargissement en dépend et il suffit alors de procéder à une analyse différentielle. Ceci suppose cependant qu'en l'absence de champ magnétique, l'élargissement est le même pour toutes les raies. Cette hypothèse s'avère inexacte en particulier parce que la turbulence, comme la rotation différentielle, n'affecteront pas de la même manière des raies formées en différentes couches de l'atmosphère. Cette méthode permet à Guenther d'avancer la limite supérieure (du produit du facteur de remplissage par le champ magnétique) de 2.0 ± 0.6 kG pour les T Tauri Lk Ca 15 et V410 Tau, et de 2.6 ± 0.8 kG pour T Tau [74, 73]. Guenther a développé également plusieurs arguments en faveur de l'utilisation des raies dans le proche infrarouge [73] : l'élargissement Zeeman est une fonction du carré de la longueur d'onde, λ . Comme néanmoins la largeur intrinsèque de la raie est proportionnelle à la longueur d'onde elle-même, le gain n'augmente que proportionnellement à λ . Par ailleurs, les étoiles de type tardif sont assez brillantes dans ce domaine de longueur d'onde. Enfin, l'extinction plus faible en infrarouge autoriserait la mesure de sources enfouies. Il propose d'utiliser en particulier les raies du Fe I. Une alternative à cette méthode consiste à mesurer la largeur équivalente de la raie. Celle-ci ne dépend pas du v_{ini} de l'étoile ce qui lui confère un avantage certain par rapport à la précédente méthode. L'inconvénient majeur est qu'il est nécessaire de calculer des profils de raies intrinsèques par des codes de transfert radiatif, ce qui est lourd et exige de connaître, avec précision, de nombreux paramètres (vitesse de micro-turbulence, gravité mais aussi facteurs de Landé des raies...). De cette méthode G. Basri a déduit la limite supérieure de 1.5 kG pour TAP 35 et de 0.7 kG pour TAP 10 [8].

Citons également une méthode très récente et sans doute prometteuse : l'imagerie Zeeman Doppler (ZDI). Elle tire tout son intérêt de ce qu'elle permet d'estimer la valeur du champ magnétique local c'est à dire, non pas moyennée sur le disque mais en chaque point de la sphère. Son principe est, dans ses grandes lignes, le même qu'en imagerie Doppler. À la différence de celle-ci, l'imagerie Doppler Zeeman vise à reconstruire les paramètres de Stokes [127, 51, 56] c'est à dire la topologie du champ magnétique à la surface de l'étoile. Dans la pratique, seuls les paramètres intensité (I) et polarisation circulaire (V) sont cherchés mais le principe peut être étendu sans difficultés aux deux paramètres de polarisation linéaire. Jusqu'à présent, aucune carte ZDI de TTS n'a été reconstruite du fait du rapport signal sur bruit que requiert la méthode tandis que les étoiles T Tauri sont très faiblement lumineuses. Cette méthode a par contre rencontré un vif succès grâce la cartographie des étoiles de type Ap telle ϵ UMa [55], ou encore les systèmes RS CVn tel V711 Tau (HR 1099) [54, 53, 52]. Ces deux groupes stellaires sont en effet connus pour leur grande activité magnétique de type solaire.

En résumé, la mesure directe du champ magnétique sur les TTS reste à l'heure ac-

tuelle un pari, qui semble plus attendre des prochains progrès instrumentaux que de la modélisation. Il faut donc se tourner vers des méthodes indirectes. Outre les propriétés mentionnées ci-haut et qui fournissent une idée de l'activité, la variation périodique des courbes de lumière et l'imagerie Doppler, figurent parmi les seules techniques envisageables pour estimer qualitativement le champ magnétique en surface.

Estimations qualitatives

Déjà en 1962 Herbig relatait une quasi périodicité de la courbe de lumière de CTTS sur une échelle de temps de l'ordre de quelques jours. Il faut cependant attendre 1983 pour qu'une vraie périodicité soit détectée sur des WTTS (V410 Tau en particulier) [123, 140]. Cette variabilité s'interprète comme la conséquence d'une distribution hétérogène de la température à la surface de l'étoile, qui vient moduler la courbe de lumière⁶ : si on suppose, par exemple, l'existence d'une région froide à la surface de l'étoile, le flux mesuré diminue d'autant que la tache est visible. La courbe enregistrée est alors périodique de la période de l'étoile. Dans les premiers modèles, l'hypothèse est faite d'une tache unique dont sont cherchés les paramètres : position, rayon et brillance. Ils ont permis d'obtenir de nombreux résultats [23, 24, 20, 26]. C'est ainsi qu'il a été déduit que le facteur de couverture des taches pourrait atteindre 10 à 40% de la surface du disque stellaire, alors qu'il n'est que de quelques pour-cents sur le soleil. Les propriétés magnétiques, obtenues à partir de ces modèles, montrent qu'à niveau de rotation égal, les WTTS sont comparables aux étoiles magnétiques actives de type tardif [22]. Les mécanismes sur les CTTS semblent plus complexes : outre de larges taches froides, les observations semblent prédire l'existence de régions plus chaudes que la photosphère. Déjà dans son échantillon de 11 étoiles, J. Bouvier stipulait la présence probable d'une tache chaude⁷ sur DF Tau [20, 12]. Cette étoile fait en ce moment même l'objet d'une analyse en imagerie Doppler [136] qui semble confirmer l'existence de taches polaires (nous y reviendrons dans le chapitre suivant). Ces régions chaudes sont, dans le cas des TTS, souvent attribuées à des régions de chocs où la matière est accrétée du disque sur l'étoile. Aux cours d'observation, J. Bouvier enregistre également une variation très importante de la période (30%), dans l'espace d'une année seulement. La cause de cette variation n'est pas encore comprise [27].

Si ces modèles donnent une idée grossière du champ à la surface, il ne permet pas de déduire sa topographie. C'est en cela que l'imagerie Doppler tire tout son intérêt puisque cette technique vise à cartographier ("spatialement") les inhomogénéités en température. Il est de constater que peu de cartes sont encore reconstruites. Ceci tient en grande partie

6. La courbe de lumière représente le flux, en provenance de l'hémisphère visible, mesuré dans différents filtres (les filtres UBVRI par exemple).

7. La température de la tache s'élèverait à quelques milliers de kelvins au dessus de la température de la photosphère.

à la magnitude visuelle très faible de ces étoiles, conséquence de leur éloignement, mais aussi à leur environnement : le nuage moléculaire le plus proche est à une distance de 120 – 150 pc et par ailleurs, une étoile T Tauri perd typiquement 1 mag par la présence de matière circumstellaire et d’une enveloppe de poussière. En moyenne, la magnitude est ainsi de l’ordre de $V = 13$ mag. Par ailleurs, si l’inclinaison de l’étoile est trop petite, l’effet Doppler est négligeable (car proportionnel à $\sin i$, voir équ. (1.1)) et la carte ne peut être reconstruite. Enfin, si le veiling est important, le spectre peut ne montrer aucune raie photosphérique auquel cas, l’imagerie Doppler est là aussi irréalisable.

C’est donc des WTTS les plus brillantes, qu’ont été réalisées les premières cartes : V410 Tau [120, 133, 89], HDE 283572 [88]. Strassmeier a entrepris la cartographie systématique de V410 Tau dans l’idée de repérer une migration éventuelle des taches. Il déduit de ses reconstructions une légère rotation différentielle, qu’il remarque être du même type que celle du soleil. Il estime également une longévité des taches de l’ordre de l’année [133, 120]. Toutes ces cartes laissent voir des taches de préférence aux pôles. En ce qui concerne les CTTS, la première carte est celle faite sur SU Aurigae [108, 109, 100], CTTS que nous proposons d’étudier également par imagerie Doppler dans le chapitre suivant. Enfin très récemment, Y. Unruh a obtenu la distribution du facteur de remplissage sur DF Tau [136]. Elle en déduit la présence probable de régions chaudes qu’elle interprète comme la signature de matière s’accrétant sur l’étoile suivant les lignes de champ magnétique. Ce modèle d’accrétion est présenté dans la section suivante 1.2.3.

1.2.3 Quelques modèles existants

Le but de cette dernière partie est de rassembler les signatures d’activités qui viennent d’être énumérées en présentant très grossièrement quelques modèles existants. La structure intrinsèque de l’étoile comme l’interaction qu’elle entretient avec son environnement restent des questions ouvertes auxquelles ces modèles tentent d’apporter une réponse. Nous essaierons d’insister sur les données que prédisent ces modèles et ainsi de montrer dans quelle mesure l’imagerie Doppler est riche en information.

De manière générale, l’interprétation des propriétés des T Tauri fait intervenir une atmosphère de type solaire, une enveloppe étendue de gaz ionisé et une enveloppe circumstellaire de grains. Nous présentons en premier lieu, deux modèles qui tentent de rendre compte du spectre d’émission des TTS. Ce deux modèles font appel au champ magnétique intrinsèque de l’étoile qui, comme nous l’avons vu précédemment, expliquerait la présence de taches froides. À la suite de ces deux modèles, nous en présentons deux autres susceptibles de traduire les phénomènes d’accrétion. Les chocs qui en résultent se traduiraient par la présence de taches dont la température serait plus élevée que celle de la photosphère. Si ses modèles prédisent des localisations différentes des taches, les cartes d’imagerie Doppler peuvent plaider en faveur d’un modèle et aider à réfuter un autre.

Modèles de spectre en émission

Pour rendre compte du spectre d'émission intense, deux modèles essentiellement ont été proposés : celui dit de la chromosphère profonde [30], celui dit d'enveloppe étendue de gaz ionisé [76].

Le modèle de chromosphère profonde repose sur l'analogie avec le soleil : un profil de température chromosphérique est fixé. Suivant la profondeur optique au minimum de température, les raies en émission viennent plus ou moins remplir les raies photosphériques en absorption jusqu'à faire apparaître un spectre en émission pour une profondeur optique voisine de l'unité.⁸ Le remplissage de raies photosphériques (veiling en anglais) est assez bien expliqué par le modèle de chromosphère profonde pour les étoiles à faibles raies d'émission (WTTS). En effet, rappelons que celles-ci ne témoignent pas de signe de vent stellaire ou d'accrétion de sorte que le veiling est négligeable. Du flux UV observé on s'attend, par analogie avec le soleil et d'après ce modèle, à une valeur du champ magnétique de l'ordre du kilo gauss. Celui-ci couvrirait une très large partie de la surface de l'étoile. À l'opposé, le modèle de chromosphère profonde reproduit difficilement certaines observations faites sur la classe de CTTS. En particulier, son incapacité à rendre compte du flux dans certaines raies, telles les raies H_α , Ca II, MgII, laisse planer le doute sur une origine magnétique du chauffage de la chromosphère [8]. Par ailleurs d'après le modèle de dynamo, on s'attend à trouver une corrélation entre la raie en émission H_α et la rotation, qui n'est pas toujours observée (voir par exemple l'article sur SU Aurigae [84]).

Le modèle d'enveloppe étendue stipule l'existence d'un champ magnétique, d'une centaine de Gauss, qui serait à la base de l'existence d'un vent stellaire. Une perte de masse de l'ordre de $10^{-8} M_\odot$ est attendue. Ce vent serait à l'origine d'une enveloppe de gaz ionisé, susceptible de donner des raies en émission. Elle s'étendrait sur quelques rayons stellaires. Le succès de ce modèle tient essentiellement à ce qu'il permet de reproduire des largeurs équivalentes d'une centaine d'Angströms dans la raie H_α notamment.

Ainsi de ces deux modèles il est possible de tirer quelques informations sur le champ magnétique. Si celui-ci est en accord avec les structures froides de la carte Doppler, celle-ci confortera le modèle.

Modèles d'accrétion

Comme nous l'avons vu précédemment, plusieurs indices laissent entrevoir les signes d'une accrétion plus ou moins forte. A ce jour, deux modèles sont en compétition. Le premier repose sur la modélisation d'une couche limite [116]. Le second prévoit l'accrétion de matière le long de lignes de champ magnétique [12] (pour un résumé on pourra, par

8. La photosphère, qui est souvent confondue avec la surface de l'étoile, est en effet définie comme le lieu des points situés à une profondeur optique voisine de l'unité.

exemple, se reporter à [14]).

Dans le premier modèle, deux anneaux de matière, entre le disque et la surface de l'étoile, sont en rotation différentielle. La friction des deux anneaux conduit à l'accrétion de matière (en chute libre dans le plan du disque) et donnerait lieu à une bande équatoriale brillante sur la photosphère. Ce modèle permet de rendre compte de l'excès UV des CTTS, par la dissipation d'énergie au niveau de cette couche limite [16]. Par contre il ne prédit pas l'existence de taches chaudes polaires (comme le montre cependant l'analyse des courbes de lumière [23, 20, 75] ou les cartes d'imagerie Doppler [136]). Par ailleurs, l'étude des profils P Cygni des raies de Balmer indique des vitesses de chute en désaccord avec celles prédites par ce modèle. Enfin, le transfert de moment angulaire déduit de l'accrétion de matière devrait se traduire par une accélération de la vitesse de rotation de l'étoile, ce qui n'est pas observé. Toutefois, cette affirmation est à nuancer : des changements de période ont en effet été détectés. De ce point de vue, l'incapacité à reproduire la valeur observée des variations de la période peut venir de l'imprécision du modèle. Ceci explique que ce modèle fasse aujourd'hui encore figure de référence en ce qui concerne l'explication des mécanismes d'accrétion. Il a notamment été appliqué à l'étude de DF Tau [13], V410 Tau, BP Tau... [12], dont furent déterminés les paramètres (viscosité, épaisseur de la couche limite, taux d'accrétion...) de la couche limite.

Dans le second modèle, un fort champ magnétique (~ 1 kG) au niveau de la magnétosphère, viendrait rompre le disque à quelques rayons de l'étoile. Les lignes ancrées sur le disque arriveraient au niveau des pôles de l'étoile. La matière qui s'accrète serait alors canalisée le long de ces lignes de champ magnétique et donnerait lieu à des chocs (voir Fig. 1.3).

Ceux-ci seraient à l'origine de l'émission dans les domaines UV et X. Le grand succès de ce modèle est qu'il reproduit les taux de rotation observés : l'étoile couplée au disque par le champ magnétique est ainsi freinée [34]. Par ailleurs, ce couplage entre le disque et l'étoile permet d'expliquer que les WTTS, supposées s'être débarrassées en grande partie de leur disque, tournent en moyenne plus vite que les CTTS. Mentionnons toutefois une toute autre explication amusante de la disparité des périodes entre ces deux classes d'étoiles. Smith [129] l'attribue à la rotation différentielle entre l'équateur et les pôles : si les taches des WTTS se situent de préférence à l'équateur et celles de CTTS, de préférence aux pôles, et si la période de rotation à l'équateur est (comme dans le cas du soleil) plus courte que celle aux pôles, alors la période déduite de la modulation rotationnelle des courbes de lumière sera plus petite pour les WTTS que pour les CTTS. Il argumente sa thèse en soulignant que la distribution des $v \sin i$ ne permet pas de distinguer les deux classes. Le modèle de la magnétosphère donne également une interprétation directe de la présence de régions polaires chaudes. Enfin, les vitesses de chute qui sont prévues [57] semblent en accord avec les vitesses déduites de l'analyse des raies de Balmer : les composantes en

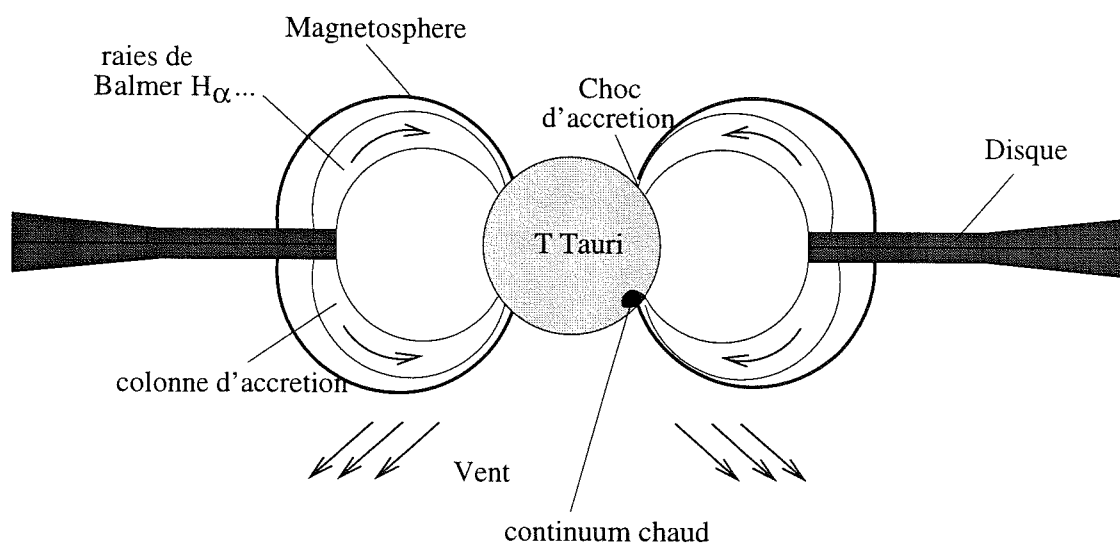


FIG. 1.3 – La matière accrétée du disque vers l'étoile, est canalisée le long des lignes de champ magnétique. Les taches chaudes à l'équateur, les raies de Balmer en émission... sont autant d'indices du taux d'accrétion, estimé, en moyenne, à $10^{-8} M_{\odot}/\text{an}$. L'accrétion induit également un vent stellaire. .

émission dans l'aile rouge permettent, par mesure de l'effet Doppler, d'évaluer la vitesse de la matière en mouvement. Comme de plus les raies de Balmer se forment à des distances différentes de l'étoile, l'accélération peut être grossièrement déduite. De manière plus générale, des calculs récents de raies, établis à partir de ces modèles (en particulier des raies de Balmer), montrent une très bonne adéquation avec les profils observés [32]. Pour un résumé des principaux arguments en faveur de ce modèle, mais aussi de certaines difficultés à rendre compte des observations, on pourra se reporter à l'exposé de Edwards [57].

Au vu de ces deux modèles, la connaissance de la topologie du champ (entre autre de l'existence ou non de taches polaires ou d'anneaux équatoriaux brillants), permettrait de privilégier un modèle par rapport à l'autre. À cette date, seules deux CTTS ont été cartographiées : DF Tau [136] et SU Aur [108, 109, 100]. Pour la première, des taches chaudes polaires semblent plaider en faveur du modèle d'accrétion par contrôle magnétique.

Ainsi dans ce chapitre nous avons souligné les enjeux astrophysiques et tenté de voir de quelles manières les différentes techniques de traitement de données pouvaient y répondre. En particulier, la topographie du champ magnétique intervient directement dans les modèles d'émission de raies et les modèles d'accrétion. Or l'imagerie Doppler reste dans la plupart des cas (au moins pour les T Tauri) un moyen unique d'obtenir une information sur l'organisation du champ en surface de l'étoile.

Dans le chapitre suivant nous discutons des éléments d'information apportés par l'étude

de SU Aurigae, et de l'implication, pour la validation des modèles, des cartes d'imagerie Doppler. L'analyse faite reste toutefois insuffisante même si le but est, plus modestement, de discuter des limites de ces modèles et de leurs difficultés à expliquer certaines observations. Nous préciserons, en conclusion du chapitre suivant, le travail qu'il reste à faire pour tirer pleinement partie des observations faites.

Chapitre 2

Contribution à l'étude de l'activité de SU Aurigae

Sommaire

2.1 Propriétés de SU Aurigae	150
2.1.1 Paramètres stellaires	150
2.1.2 Chromosphère	151
2.1.3 Rotation différentielle	152
2.1.4 Vent et accréation	152
2.2 Observations	154
2.2.1 Spectrométrie	154
2.2.2 Photométrie	156
2.2.3 Polarimétrie	157
2.3 Cartes d'imagerie Doppler de SU Aurigae	157
2.3.1 Code de maximum d'entropie	157
2.3.2 Préparation des données d'imagerie Doppler	158
2.3.3 Cartes Doppler de SU Aurigae : résultats et discussion	158

La distribution des inhomogénéités en température à la surface d'une T Tauri apporte quelques arguments supplémentaires pour ratifier un modèle au dépens d'un autre. Dans ce contexte, nous présentons la carte d'imagerie Doppler d'une T Tauri classique de la région de formation du Taureau : SU Aurigae. Dans une première partie, les propriétés de cette étoile et les travaux antécédents sont résumés. Les observations menées à l'Observatoire de Haute Provence (OHP) durant les hivers 1994 et 1995, sont ensuite décrites. La troisième partie concerne la reconstruction des cartes de surfaces par imagerie Doppler. Les résultats obtenus sont discutés.

2.1 Propriétés de SU Aurigae

SU Aurigae est une des T Tauri les plus brillantes ($m_v = 9.7$), ce qui explique qu'elle ait fait l'objet de nombreuses campagnes d'observations [85, 129, 25, 26, 12]. Cependant ce n'est que très récemment que, grâce à la très bonne résolution spectrale des instruments, une analyse méticuleuse de son activité à partir de l'évolution temporelle des raies a été entreprise [61, 84, 109].

2.1.1 Paramètres stellaires

Cette nébuleuse rouge est localisée dans le complexe du Taureau. Sa *vitesse de déplacement*, estimée à $18 \pm 3 \text{ km s}^{-1}$, est celle du nuage moléculaire dans lequel elle se trouve [84, 109]. D'après les données que nous avons obtenues à l'OHP sur les raies photosphériques du lithium à 6708 Å, du fer à 6400 Å, du calcium à 6439 Å et du magnésium à 5183 Å, nous adoptons pour la vitesse radiale, la valeur de 19 km s^{-1} .

SU Aurigae est une *CTTS de type spectral G2III*. Sa faible largeur équivalente dans la raie H_α ($\text{EW}(H_\alpha) = 4\text{Å}$), explique qu'elle ait parfois été classée parmi les WTTS (voir par exemple [129]). Cependant, cette valeur peut être expliquée par sa photosphère très brillante (type $S_p=G2$). En remarquant par ailleurs que l'étoile présente un excès IR important, Bouvier [26] soulignait qu'il était plus probable que l'objet appartienne aux groupes des CTTS.

D'après l'analyse des raies photosphériques, celles-ci ne sont pas remplies [84, 109], ce qui est cohérent avec la valeur du *veiling* de $0.0 \pm 0.1 \text{ Å}$ avancée par Basri [6]. Les données spectrométriques obtenues à l'OHP ne montrent également pas de *veiling* significatif.

La *période* de rotation de l'étoile est restée incertaine tant qu'elle reposait sur l'analyse de la courbe de lumière: la modulation d'amplitude dans les différents filtres ne montre pas d'évidence de périodicité. Suite à la campagne COYOTES I dont l'un des buts était d'établir les périodes de rotation de T Tauri, une limite supérieure de 3.4 jours fut avancée avec une probabilité plus forte pour une période de 2.78 jours [26]. Par la suite, l'étude des profils de raies (en particulier les raies de Balmer), révéla une périodicité de l'intensité et du décalage de la composante en absorption dans l'aile rouge estimée à ~ 3 jours [61, 84, 109]. SU Aurigae est donc un rotateur rapide ce qui laisse supposer de son activité magnétique (voir remarque dans la section 1.1.2).

Du fait du type spectral¹, la contribution de la photosphère et de la chromosphère de standard G2, suffit pratiquement à expliquer l'*émission UV* observée. L'excès UV semble ainsi assez modeste même s'il est nécessaire, pour le reproduire, de faire intervenir un modèle de disque d'accrétion tel par exemple, le modèle de couche limite [12]. L'excès IR est appréciable indiquant la présence d'un disque circumstellaire [12]. SU Aurigae

1. La température de la photosphère de SU Aurigae est plus élevée que la moyenne calculée sur les TTS.

TAB. 2.1 – *Paramètres stellaires de SU Aurigae*

v_{rad}	Période	$v \sin i$	incli.	T_{eff}	$\log g$	Rayon	$v_{\mu turb}$	Masse
km s ⁻¹	jours	km s ⁻¹	°	K	(cgs)	R _☉	kms ⁻¹	M _☉
19	3.032	61.5	85	5780	3.7	3.6	2.5	2.25

est également une *source de rayons X* importante [114] ce qui est là aussi un indicateur d'activité magnétique (voir section 1.2.1).

Du fait de l'enveloppe circumstellaire, les mesures de *polarimétrie* n'apportent pas de contraintes supplémentaires sur le champ magnétique à la surface de l'étoile. Le degré de polarisation n'est pas élevé ce qui, éventuellement est synonyme d'une répartition isotrope des grains de poussière. Les observations menées au Pic du Midi simultanément aux observations de l'OHP de novembre et décembre 1995, confirment la valeur faible de la polarisation. *L'extinction* a été évaluée à $A_V = 0.93 \pm 0.14$ par Bertout [12].

Petrov *et al.* [109] ont également obtenu la photométrie dans les bandes U, B et V. Ils notent que, lors de variations importantes de l'intensité et de la vitesse radiale des différentes composantes des raies de Balmer, le flux mesuré reste à peu près constant. C'est là une des raisons pour lesquelles les variations photométriques sont attribuées au milieu circumstellaire et non à des régions inhomogènes sur la surface de l'étoile.

Les valeurs des paramètres stellaires utilisés par la suite sont résumées dans la table 2.1.

2.1.2 Chromosphère

En comparant la raie en IR du Ca II de SU Aurigae, d'une part à celle d'étoiles standards G2, d'autre part à celle du spectre solaire, raie dont l'origine est attribuée aux plages, Johns et Basri [84] remarquent qu'elle est légèrement remplie. Ils en déduisent que ceci est soit la conséquence d'une chromosphère profonde sur SU Aur, soit dû à l'existence d'une source, d'origine non stellaire, qui viendrait remplir la raie. Contrairement à ce qui est couramment observé, il n'y a aucune corrélation entre cette raie et les raies de Balmer ce qui signifierait qu'il n'existe pas de lien entre la chromosphère et la région sondée par les raies de Balmer.

La largeur équivalente de la raie He I varie avec la rotation. Ceci serait également la marque d'une activité chromosphérique soutenue. En effet, Johns et Basri notent une corrélation très forte entre les variations des largeurs équivalentes des deux raies, Ca II et He I.

Enfin, le coeur de la raie Mg I de SU Aurigae semble légèrement rempli par rapport à

celui d'une standard G2. Comme le veiling est négligeable, Johns et Basri attribuent cet effet à un renforcement de l'activité chromosphérique.

2.1.3 Rotation différentielle

La disparité observée des périodes de rotation entre la classe des CTTS et de WTTS, a été remise en cause par Smith [129]. S'appuyant sur ce que prédisent les modèles dynamo, à savoir une rotation différentielle importante sur des étoiles dominées par la convection, Smith [129] suggérait que la variation de période ne soit qu'une conséquence de la rotation différentielle. En effet, si les taches des WTTS se trouvent, comme dans le cas du soleil, aux basses latitudes tandis que les taches des CTTS sont, comme prédit par le modèle d'accrétion contrôlée par la magnétosphère, de préférence aux pôles alors, sous l'hypothèse que l'équateur tourne plus vite que les pôles, la période photométrique des WTTS sera plus courte que celle des CTTS.

Johns-Krull [85] rappelle que la rotation différentielle modifie la forme des profils de raies. Pour deux TTS, nommément V410 Tau et SU Aurigae, il déduit de l'analyse des profils le taux de rotation différentielle. La loi adoptée pour modéliser la rotation différentielle est une loi empirique qui reproduit assez fidèlement la solution de l'équation hydrodynamique pour des étoiles convectives tournant rapidement [129] :

$$\frac{\Omega(\theta)}{\Omega_{\text{équa}}} = 1 - D_r \cos^2 \theta,$$

où $\Omega_{\text{équa}}$ est la vitesse angulaire à l'équateur et D_r le taux de rotation différentielle ($D_r = 0$ dans le cas de rotation solide).

Dans un premier temps, l'étoile est supposée homogène c'est à dire, de température constante sur toute la surface. Dans un second temps, les taches polaires, déduites des cartes d'imagerie Doppler de V410 Tau [89], sont prises en compte pour l'une et l'autre des étoiles. Dans un cas comme dans l'autre, il conclut que le taux de rotation différentielle n'est pas significatif.

2.1.4 Vent et accrétion

Suite à l'analyse de l'évolution temporelle des profils de raies, des modèles d'accrétion et de vent ont été proposés. Ces derniers sont brièvement présentés dans cette section qui reprend, pour l'essentiel, les travaux de Giampapa *et al.* [61] de Johns et Basri [84] et enfin de Petrov [109].

Flot entrant

Les raies de Balmer, de H_α à H_δ , présentent toutes une composante en absorption dans l'aile rouge. Celle-ci est interprétée comme la signature de matière en chute sur l'étoile.

Contrairement à ce qui est attendu d'un modèle d'accrétion de matière en chute libre sur l'étoile, le décalage de cette composante diminue quand l'ordre des raies de Balmer augmente. Comme les raies de Balmer de plus haut niveau se forment plus près de la surface de l'étoile, ceci traduirait un freinage de la matière. Johns et Basri émettent l'idée que la diminution observée de ce décalage ne soit que la conséquence du recouvrement de la composante en absorption par la composante en émission. Ceci aurait pour effet de déplacer le centre de gravité de la composante en absorption et ainsi, la diminution de la vitesse ne serait pas réelle. Petrov *et al.* évoquent la possibilité que la matière ne soit pas en chute libre. L'intensité des raies H_α et H_β , tout comme la vitesse radiale de la composante rouge en absorption des raies de Balmer et de la raie He I, varie périodiquement sur trois jours. Ceci est un indice précieux qui est bien expliqué par le modèle d'accrétion canalisée par les lignes de champ.

Un autre argument en faveur de ce modèle d'accrétion tient aux calculs de profils de raies menés dans ce contexte (voir Hartmann *et al.* [77]), qui reproduisent parfaitement les composantes en absorption vues dans l'aile rouge des raies de Balmer. En effet, ce modèle prédit l'existence de taches chaudes localisées au lieu du choc de la matière sur l'étoile (et donc vers les pôles), qui absorberaient les radiations expliquant ainsi les composantes en absorption.

La présence de taches chaudes a été invoquée pour expliquer la modulation d'amplitude des courbes de lumière de plusieurs CTTS [27]. Cependant si ces taches sont situées, comme le prévoit le modèle d'accrétion, aux pôles magnétiques de l'étoile, et si par ailleurs les axes de rotation et du dipôle (selon le schéma simple d'une configuration dipolaire du champ magnétique) sont confondus, alors aucune modulation ne sera mesurée. Il faut donc, pour expliquer les variations de flux, que l'axe de la magnétosphère et l'axe de rotation soient inclinés l'un par rapport à l'autre. Dans ce cas, la matière au lieu du choc est animée d'une vitesse dont la composante sur l'axe de visée variera au cours de la rotation de l'étoile et ceci d'autant plus que l'inclinaison est grande. Ainsi, de la variation de cette composante il est possible de déduire l'inclinaison du dipôle magnétique sur l'axe de rotation. La variation du décalage de la composante en absorption des raies de Balmer est assez modeste sur SU Aur ($\sim 30 \text{ km s}^{-1}$), d'où Petrov *et al.* concluent que l'inclinaison n'est que de quelques degrés. Une conséquence importante de cette faible inclinaison est qu'une tache chaude, par exemple de température 10 000 K qui couvrirait 1% de la surface et serait située à la latitude 80° , donnerait une variation d'amplitude dans la bande V de l'ordre de 0.03 mag seulement. En résumé, si la valeur faible de l'inclinaison (de l'axe de rotation et de la magnétosphère), estimée à partir de la variation de la vitesse radiale de la matière en chute sur l'étoile, est réelle, les taches chaudes aux pôles magnétiques, seront pratiquement transparentes aux observations photométriques. Ceci permet également d'expliquer la variation quasiment nulle des largeurs équivalentes.

Flot sortant

Les composantes en absorption des raies H_α et H_β décalées vers le bleu, témoignent d'un flot sortant. Le décalage est plus élevé pour la raie H_α (qui sonde des régions plus éloignées de la surface de l'étoile que la raie H_β) que pour la raie H_β indiquant ainsi que la matière en éjection est accélérée. Des variations énormes de l'intensité, sur une échelle de temps de l'ordre du jour (avec une variation peu significative sur une nuit), sont enregistrées. Elles sont très irrégulières, d'où Giampapa *et al.* de même que Johns et Basri, concluent que l'éjection de matière est plutôt impulsive, ce qu'ils attribuent à la formation d'une "coquille" en expansion. D'autre part, le décalage de cette composante varie considérablement, entre -100 et -200 km s^{-1} . De cette variation peut être retracée la décélération de la matière au cours du temps. Ainsi, Petrov *et al.* ont proposé le modèle d'un vent qui émanerait de la surface de l'étoile. Il s'accélérerait linéairement jusqu'à atteindre la vitesse d'échappement à $\sim 3R_*$. À cette distance, il décélérerait sous l'effet de la gravité. Le taux de perte de masse associé au vent est assez faible comparativement à d'autres CTTS. Il a été estimé à $6 \cdot 10^{-8} M_\odot / \text{an}$ par Bertout [12] et plus récemment entre $2.0 \cdot 10^{-9} M_\odot / \text{an}$ et $8.3 \cdot 10^{-9} M_\odot / \text{an}$ par Johns et Basri. Ces dernières valeurs sont issues d'un modèle de transfert radiatif dont les paramètres de l'atmosphère de l'étoile (vitesse de turbulence, taux de perte de masse...) sont ajustés de manière à reproduire les raies de Balmer observées. Du fait de la turbulence importante qui est déduite, la vitesse du vent, à la base, peut être assez faible. Le taux de perte de masse et le taux d'accrétion sont étroitement corrélés et on s'attend ainsi à un taux d'accrétion relativement faible. Les régions chaudes en sont d'autant plus diminuées.

2.2 Observations

Dans cette section sont présentées les différentes mesures à partir desquelles sont reconstruites les cartes d'imagerie Doppler de SU Aurigae. Nous avons mené les observations en spectrométrie haute résolution durant les hivers 1994 et 1995 à l'Observatoire de Haute Provence (OHP). La photométrie a été réalisée par K. Grankin au Mont Maidanak (Ouzbékistan) et la polarimétrie par F. Ménard au Pic du Midi (OMP).

2.2.1 Spectrométrie

Conditions observationnelles

Les premières observations sont faites sur un télescope de 1.52 m équipé du spectrographe AURELIE couplé à un détecteur CCD en ligne : Thomson TH 7832. En choisissant le réseau $n^\circ 5$, le spectrographe est utilisé dans sa configuration haute résolution. Le pouvoir de résolution est de $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 24\,000$. Le réseau est centré sur la raie du lithium :

TAB. 2.2 – *Spectrométrie à l'OHP: du 19/12/95 au 2/1/95*

Jour Julien	Tp d'exp. (s)	Φ_{rot}	S/B
2449708.374	7200	0.66	60
2449709.435	6000	0.01	90
2449710.506	7200	0.36	100
2449712.438	7200	0.00	100
2449713.449	7200	0.33	120
2449713.559	6000	0.37	100
2449714.420	7200	0.65	150
2449715.458	7200	0.99	70

Li I 6707Å, et couvre une gamme en longueur d'onde s'étalant de 5500 Å à 7000 Å. Le temps d'exposition varie de 100 à 120 mn selon les conditions météorologiques. La date des observations, la phase, le temps d'exposition et le rapport signal sur bruit sont listés dans le journal d'observation (Tab. 2.2).

Les observations de 1995 s'inscrivent dans une campagne plus large franco-mexicaine, visant à analyser la variabilité des TTS à différentes échelles de temps. Des données en photométrie, polarimétrie et spectrométrie haute résolution ont ainsi été obtenues simultanément. Seules ces dernières sont détaillées dans la mesure où les cartes d'imagerie Doppler qui sont présentées par la suite en dépendent presque exclusivement.

La spectrométrie a été faite à l'OHP durant les mois de novembre et décembre 1995 sur le télescope de 1.93 m, doté du spectro-échelle ELODIE. La résolution de l'instrument est de $R = 42\,000$. En une pose, un spectre couvrant une gamme en longueur d'onde allant de 3906 Å à 6811 Å, est enregistré sur un CCD de 1024×1024 . Le temps d'exposition varie entre la demi-heure et l'heure et demie. Le journal d'observation est donné (Tab. 2.3).

Dépouillement des données

Le dépouillement des spectres obtenus avec AURELIE est faite à l'aide du logiciel de traitement de données astrophysiques MIDAS. Les poses "dark" (courant d'obscurité) et "bias" (seuil électronique) sont soustraites, les rayons cosmiques éliminés et le "flat field" corrigé. Ensuite, les spectres sont normalisés, corrigés de la vitesse héliocentrique et calibrés avec les raies d'une lampe à thorium-argon. La résolution finale est estimée à 0.3 Å c'est à dire, 13 km s^{-1} .

La réduction des données ELODIE est faite automatiquement. Les détails de la procédure sont décrits dans [1] où la résolution est estimée à 7.4 km s^{-1} dans le bleu et 7.0 km s^{-1} dans le rouge. La normalisation est faite à l'aide du logiciel MIDAS.

TAB. 2.3 – *Spectrométrie à l'OHP: du 19/12/94 au 2/1/95*

Jour Julien	Tp d'exp. (s)	Φ_{rot}	S/B
2450042.346	5400	0.07	90
2450042.395	1800	0.09	70
2450046.481	3600	0.43	90
2450046.514	3600	0.44	70
2450050.421	3600	0.74	130
2450050.456	1800	0.75	100
2450051.316	2700	0.03	70
2450051.353	2700	0.04	100
2450052.562	2700	0.45	100
2450052.660	2700	0.47	90
2450053.681	2700	0.81	90
2450053.715	2700	0.82	70

2.2.2 Photométrie

Les mesures photométriques ont été obtenues à l'Observatoire du Mont Maidanak, en Ouzbékistan, sur un télescope de 0.48m équipé d'un photomultiplicateur. Elles ont été faites dans trois des filtres standard Johnson : B, V et R sur une période s'étalant du 9 août 1995 au 14 janvier 1996. Les données sont présentées sur les graphes de la figure 2.1. La réduction des données a été assurée par K. Grankin.

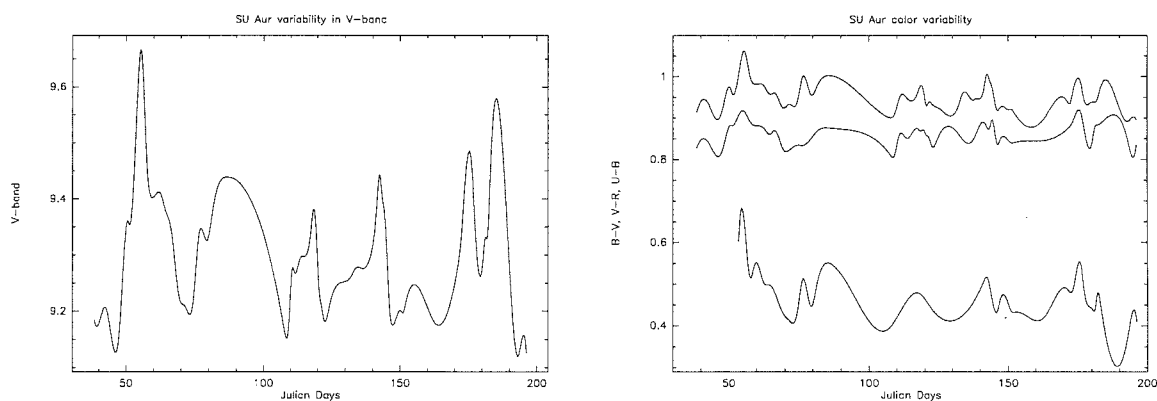


FIG. 2.1 – *Courbe de lumière de SU Aurigae obtenue sur une période de 150 jours entre le 9 août 1995 et le 14 janvier 1996. La courbe de gauche montre la variabilité en fonction du temps dans la bande V. Le graphe de droite donne les variations pour différents indices de couleurs. La date julienne est obtenue en ajoutant à l'abscisse la valeur 244 9900.*

TAB. 2.4 – *Polarimétrie à l'OMP: du 23/11/95 au 29/11/95*

Jour Julien	Filtre	P	$\sigma(P)$	θ	$\sigma(\theta)$
		%	%	°	°
2450045.450	V	0.695	0.024	138.4	1.0
2450046.480	V	0.654	0.032	136.9	1.2
2450048.485	V	0.821	0.023	135.6	1.0
2450049.476	V	0.834	0.021	134.5	1.0
2450050.566	V	0.806	0.040	129.6	1.2
2450050.718	V	0.807	0.027	134.2	1.0

2.2.3 Polarimétrie

Des mesures de polarimétrie ont été obtenues à l'OMP, simultanément aux mesures en spectrométrie et photométrie. Les données ont été réduites par F. Ménard. Les valeurs sont listées dans la table 2.4. et confirment que la polarisation n'est pas élevée.

2.3 Cartes d'imagerie Doppler de SU Aurigae

Le code d'imagerie Doppler est ici brièvement présenté. Nous décrivons ensuite le travail réalisé pour obtenir les cartes qui sont données en fin de section.

2.3.1 Code de maximum d'entropie

Le code d'imagerie Doppler utilisé, Sussex Stellar Surface Imaging Package (SSSIP), a été développé par A.C. Cameron à l'Université du Sussex (voir pour un descriptif, [35]). Il s'agit d'un code de maximum d'entropie dont le but est de cartographier la distribution de brillance à la surface de l'étoile à partir de spectres échelonnés dans le temps. Des mesures photométriques peuvent être ajoutées sans difficulté à la spectrométrie apportant ainsi des contraintes supplémentaires.

Ce code repose sur le principe d'imagerie Doppler décrit dans le chapitre 1 de la première partie, et plus spécifiquement sur le modèle à deux températures tel qu'il a été détaillé dans le chapitre 2. C'est donc plus exactement le facteur de remplissage qui est cherché. Nous avons installé à Grenoble la version 7.0 du code.

Ce code offre la possibilité :

- de calculer des courbes spectrométriques ou photométriques à partir d'une distribu-

tion donnée de brillance à la surface de l'étoile.

- de reconstruire la carte Doppler d'une étoile à partir de données spectrométriques ou photométriques selon un critère de maximum d'entropie.

L'utilisateur a la possibilité de fixer un nombre d'itérations maximal ou une valeur seuil du χ^2 pour laquelle il estime la reconstruction correcte. La convergence du code vers une solution est assez rapide (dans la pratique, une cinquantaine d'itérations suffit), dès lors que les paramètres initiaux ont été bien estimés. La reconstruction est cependant très dépendante de la valeur de certains paramètres, en particulier des valeurs de températures de la photosphère et de la tache. Une valeur erronée se traduit la plupart du temps par non convergence.

2.3.2 Préparation des données d'imagerie Doppler

Une fois les données spectroscopiques et photométriques réduites, celles-ci doivent être mises au format SSSIP. D'autre part, le profil des raies intrinsèques (voir section 1.2.2) utilisées, de même que les filtres photométriques, doivent être calculés au préalable. Pour obtenir les profils de raies intrinsèques, nous avons utilisé le code de transfert radiatif de Gustafsson [10]. Nous avons pris les abondances solaires établies par Grevesse [69], pour la plupart des raies exceptée la raie du lithium, nettement plus prononcée dans le spectre des TTS du fait de leur jeunesse. Les paramètres atomiques sont tirés de la base de données du VALD: Vienna Atomic Lines Database. La bande passante des filtres standards Johnson a été calculée d'après les valeurs données dans [3]. Une fois les profils obtenus, ceux-ci sont mis au format SSSIP (voir [35] pour le détail).

2.3.3 Cartes Doppler de SU Aurigae: résultats et discussion

Les études précédemment menées sur SU Aurigae ont démontré la complexité des phénomènes mis en jeu (voir section 2.1). L'étoile présente probablement une activité magnétique importante. En cela, la recherche de régions froides se justifie pleinement (voir chapitre 1). D'autre part, certaines données sont assez bien expliquées par le modèle d'accrétion suivant les lignes de champ. Ainsi, même si le veiling est négligeable, des taches chaudes en surface peuvent exister. C'est pourquoi nous nous proposons d'établir les cartes Doppler de SU Aurigae selon ces deux hypothèses. En effet, d'une part la carte obtenue à partir de mesures faites en 1994 par Petrov *et al.* prouve que le premier postulat est cohérent. D'autre part, d'autres méthodes observationnelles suggèrent l'existence de taches chaudes mais n'ont pas encore donné lieu à une carte Doppler.

Avant d'entreprendre toute reconstruction et toute discussion sur les solutions, il convient de rappeler quelques résultats concernant la mesure en imagerie Doppler obtenus dans la première partie. En effet, nous avons montré que la solution n'était pas

unique. Dans le cas de SU Aurigae, où l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de l'étoile sur l'axe de visée est voisin de 90° , la non injectivité se traduit par l'ambiguïté nord-sud. Cette dernière signifie que l'image, par l'opérateur de "mesures Doppler", de toute fonction impaire est nulle. C'est pourquoi toutes les cartes reconstruites présentent une forte symétrie par rapport à l'équateur ce qui, en soi, ne doit pas être interprété comme "ayant une signification physique". Il n'en demeure pas moins que les structures existent sans doute, même si on ne sait à quel hémisphère elles appartiennent.

Reconstruction de régions froides

Dans le but de vérifier la première hypothèse, nous avons reconstruit les cartes Doppler à partir de quatre raies photosphériques. Par ailleurs, disposant de mesures prises à des intervalles d'un an, la comparaison des cartes qui en découlent donnera une idée de la durée de vie des structures.

Les cartes obtenues à partir de chaque raie, prises séparément, sont représentées en projection plate carrée (Fig. 2.2) et sur la sphère pour les différentes phases observées (Fig. 2.4). L'ajustement des mesures issues de la solution aux données observées est également donné.

Les raies ont été sélectionnées principalement pour la valeur élevée de leur force d'oscillateur et leur faible potentiel d'excitation du niveau d'énergie le plus bas, de manière à garantir une largeur équivalente acceptable. De même les raies les plus sensibles à la température sont privilégiées (voir [87] pour une argumentation précise de ces critères). Les raies suivantes ont donc été retenues :

- lithium : Li $\lambda 6708 \text{ \AA}$,
- fer : Fe $\lambda 6400 \text{ \AA}$,
- calcium : Ca $\lambda 64349 \text{ \AA}$,
- magnésium : Mg $\lambda 5183 \text{ \AA}$.

Les cartes sont établies à partir d'une douzaine de spectres et d'une trentaine de points par spectre. L'échantillonnage en longueur d'onde est régulier tandis que l'échantillonnage en phase laisse hélas apparaître des trous importants et conduit ainsi au problème dit à angle limité (voir section 3.3.2 de la partie I).

Plusieurs valeurs de température de taches ont été testées et celle donnant une solution acceptable et le meilleur χ^2 a été retenue. La valeur $T_{spot} = 5000 \text{ K}$ a ainsi été fixée, ce qui est en accord avec la valeur la plus basse estimée par Petrov [109] de 5200 K .

Les quatre cartes présentent toutes un ensemble de taches à l'équateur suivies de manière assez systématique de taches aux pôles. Sur la figure 2.3 est représentée la distribution

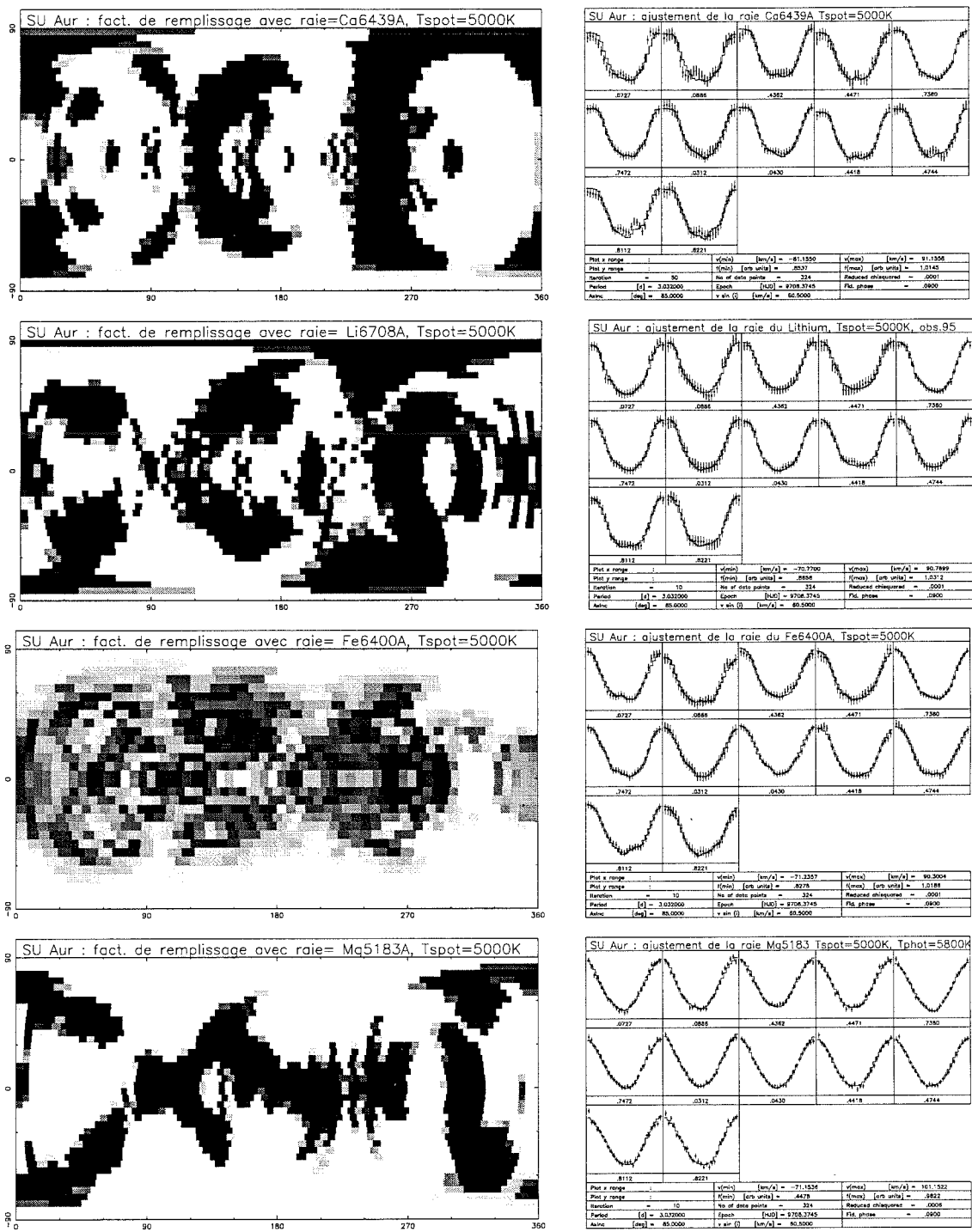


FIG. 2.2 – Sont données à gauche, les cartes d'imagerie Doppler de SU Aurigae obtenues à partir des raies du Ca, Li, Fe, Mg pour des températures de la photosphère $T_{\text{phot}} = 5800$ K, et de tache, $T_{\text{spot}} = 5000$ K et à droite, l'ajustement des différentes raies aux observations. Le jeu de données est constitué de douze spectres échantillonnés à raison de ~ 30 points par spectre. L'effet de symétrie qui apparaît n'est que la conséquence de l'ambiguïté nord-sud, liée à l'inclinaison proche de 90° de l'étoile (voir en particulier section 3.3.1). Les quatre cartes présentent toutes des taches à l'équateur et aux latitudes intermédiaires voisines de 45° . De façon assez systématique, une tache à l'équateur alterne avec une tache au pôle.

des taches en fonction de la latitude. Du fait de l'ambiguïté nord-sud, les valeurs prises par la fonction sur l'hémisphère nord ont été ajoutées à celles prises sur l'hémisphère sud. Le

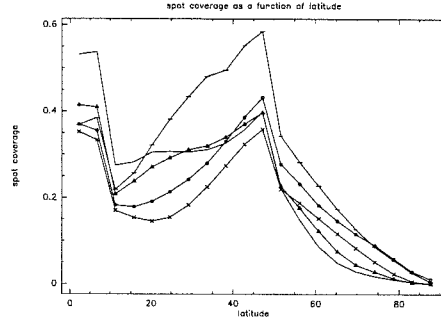


FIG. 2.3 – Le graphe donne la distribution en latitude du facteur de remplissage. Du fait de l'ambiguïté nord-sud, aux valeurs prises par la fonction sur l'hémisphère nord sont ajoutées les valeurs prises sur l'hémisphère sud. Chaque courbe résulte de la reconstruction issue du profil d'une raie : Δ :Ca, \odot :Li (94), \circ :Li (95), $-$:Fe, \times :Mg. Deux régions actives, l'une à l'équateur, l'autre à 45° , se distinguent clairement.

graphe fait clairement apparaître, pour chacune des reconstructions issues des différentes raies, deux bandes actives : l'une à l'équateur, l'autre à 45° . Cette distribution est en accord avec celle trouvée par Petrov *et al.*. En effet, la carte qu'ils ont obtenue avec le code développé par Piskunov², présente également des taches à l'équateur et aux environs des 45° . La basse résolution de leur carte (constituée à partir de huit spectres seulement), ne permet cependant pas de distinguer clairement les régions entre elles.

Par la suite, nous avons ajouté les contraintes apportées par la photométrie. Le poids des mesures photométriques par rapport au poids de la spectrométrie, fixé pour la reconstruction, est indiqué par la valeur de β (une valeur unitaire signifie que seule la spectrométrie est prise en compte). Comme souligné dans la section 2.1 précédente, les variations de la courbe de lumière semblent essentiellement résulter du milieu circumstellaire. La photométrie obtenue à l'Observatoire du Mont Maidanak ne montre aucune évidence de périodicité ce qui suggère qu'elle n'est pas simplement corrélée avec la rotation de l'étoile. La polarimétrie vient confirmer ce résultat. Aussi, nous n'avons gardé que les mesures de photométrie prises simultanément aux données spectrométriques et, pour ces raisons, nous avons cherché à donner plus de poids à la spectrométrie qu'à la photométrie. La valeur est ensuite sélectionnée de sorte que le χ^2 des mesures, tant spectrométrique que photométrique, soit acceptable. Les mesures en photométrie ne font changer que très légèrement la

2. Il s'agit également d'un code de maximum d'entropie mais ne s'appuyant pas sur un modèle à deux températures [110].

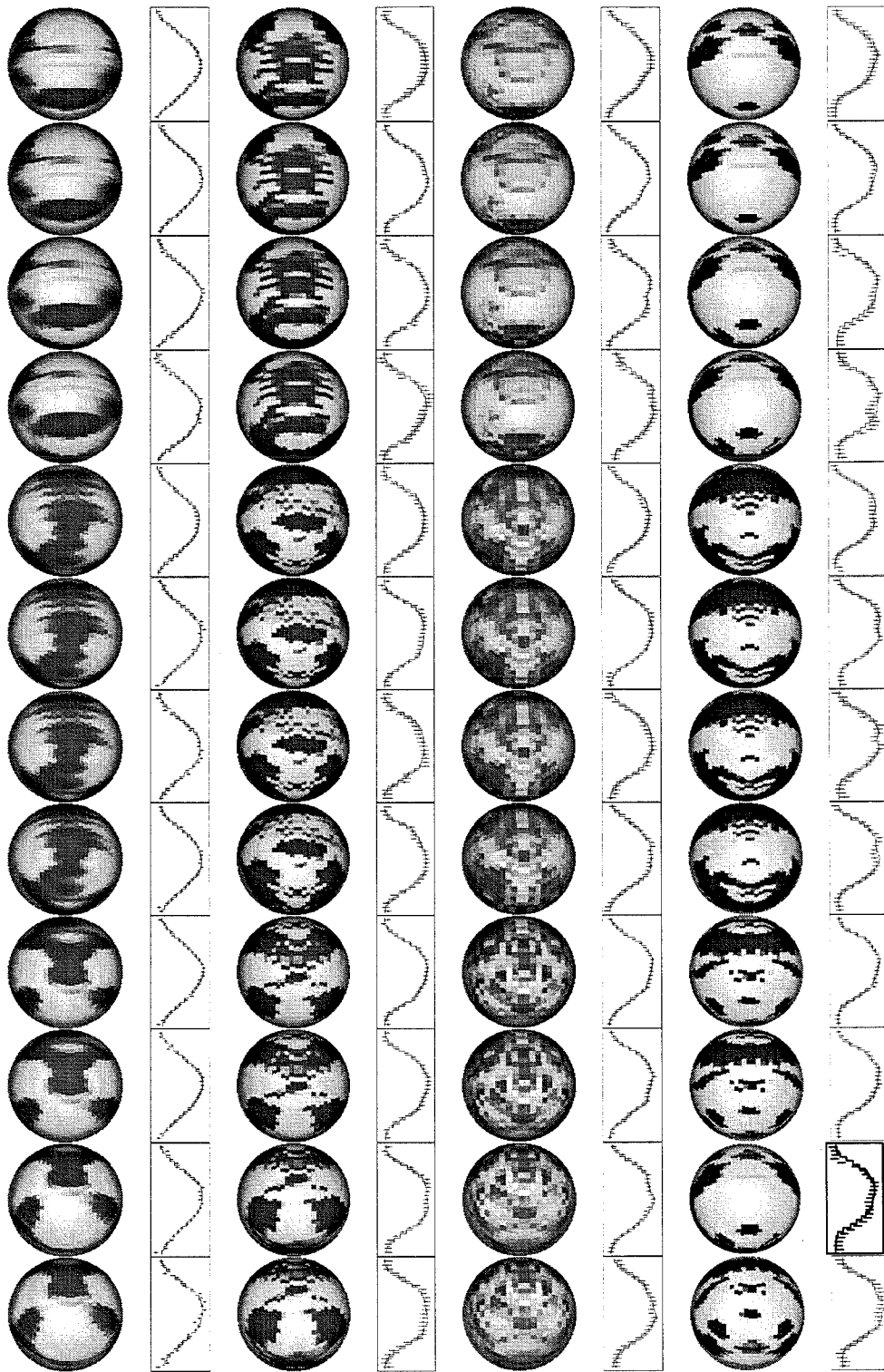


FIG. 2.4 – La solution obtenue est représentée sur la sphère pour chacune des quatre raies, de gauche à droite : Ca, Li, Fe, Mg. Les phases sont respectivement : 0.03, 0.04, 0.07, 0.09, 0.43, 0.44, 0.45, 0.47, 0.74, 0.75, 0.81, 0.82.

TAB. 2.5 – *Estimation du flux sur SU Aurigae d'après quatre raies*

Raie	β	$\chi^2_{spectro}$	χ^2_{photo}	A_{spot}/A_*	L_*/L_{nospot}
Li	0.85	0.45	0.58	0.47	0.79
Fe	0.75	0.66	0.64	0.49	0.77
Ca	0.9	0.76	0.72	0.43	0.80
Mg	0.8	0.61	0.65	0.32	0.85

solution. Aussi nous présentons le résultat sous la forme d'une table (Tab. 2.5) donnant la valeur du χ^2 , la proportion de taches sur la sphère et la brillance, obtenues pour chaque carte.

Dans la mesure où les profils de toutes les raies résultent d'une seule et même configuration de la distribution en température sur la surface de l'étoile, il est cohérent de chercher à reconstruire une carte Doppler unique, contrainte par toutes les raies à la fois. La solution est donnée Fig. 2.5 de même que celle obtenue lorsque la photométrie est ajoutée. Il faut accorder un intérêt très relatif à cette dernière carte du fait que les variations de la courbe de lumière ne sont probablement pas d'origine photosphérique. Comme précédemment, la photométrie modifie très peu la solution. La valeur du χ^2 est de l'ordre de 0.6 pour les deux cartes. Comme précédemment, des taches à l'équateur comme à 45° sont bien visibles.

Ainsi, quelle que soit la raie, toutes les cartes sont cohérentes entre elles et suggèrent l'existence de taches à l'équateur alternant avec des taches en des latitudes voisines de 45° . La figure 2.5 explique assez bien, à elle seule, le profil de toutes les raies photosphériques que nous avons sélectionné. Le facteur de couverture des taches est énorme si on le compare à celui du soleil (voir section 1.2.2). Par contre, une telle surface couverte avait déjà été suggérée, pour d'autres TTS, par des modèles basés sur la modulation de la courbe de lumière [75, 20].

Ainsi, dans un tel contexte, c'est-à-dire en interprétant les régions basses en température comme des marqueurs du champ magnétique, il est pertinent de se poser la question de la longévité des structures. En particulier, le résultat trouvé peut confirmer ou non un faible taux de la rotation différentielle et suggère une durée de vie des taches de plus d'un an. En effet, rappelons que dans le cas du soleil, la migration des taches vers l'équateur est assez bien comprise par la valeur élevée de la rotation différentielle. Cette dernière est un élément de base du cycle solaire. Par ailleurs, nous avons vu qu'un taux nul de

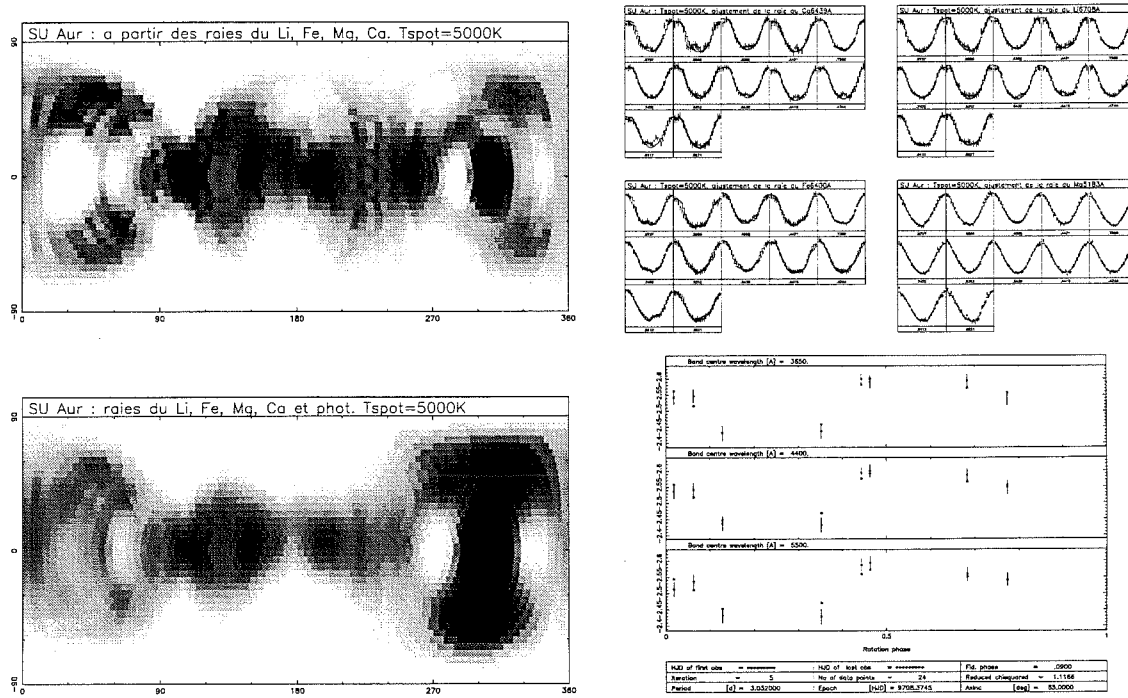


FIG. 2.5 – En haut est présentée la carte Doppler lorsque les quatre raies sont prises en compte simultanément. Les ajustements pour chacune des raies sont donnés en haut à droite. En bas se trouvent, à gauche, la solution obtenue lorsque les mesures en photométrie sont ajoutées, et à droite, l'ajustement à la photométrie dans les trois bandes, B, V, et R.

rotation différentielle permettrait de réfuter l'hypothèse proposée par Smith [129] d'une distribution équivalente des périodes de rotation des CTTS et WTTS mais montrant une forte rotation différentielle.

Nous disposons d'observations prises sur un intervalle d'une année, ce qui présente un intérêt certain pour avoir une première idée de la durée de vie des taches. Il est important de souligner que les résultats qui suivent doivent être entendus avec quelques précautions dans la mesure où les deux cartes reposent sur un nombre de mesures relativement faible.

La ressemblance des cartes obtenues à partir des hivers 1994 et 1995 est étonnante. Cette comparaison suggère une durée de vie des régions froides d'au moins un an (voir Fig. 2.6). Une collaboration entreprise avec Y Unruh devrait permettre, grâce à des observations menées en 1996, de valider ou non ce résultat. Ainsi, la durée de vie est cohérente avec le taux de rotation différentielle quasiment nul, annoncé par Johns-Krull (voir section 2.1.3). Elle est nettement plus élevée que la durée de vie des taches solaires. Rappelons que, suite aux l'observations de V410 Tau sur l'intervalle d'une année, Strassmeier [133] estimait à un an la durée de vie des taches reconstruites.

Cette longévité des structures serait-elle caractéristique des étoiles jeunes et pourrait-

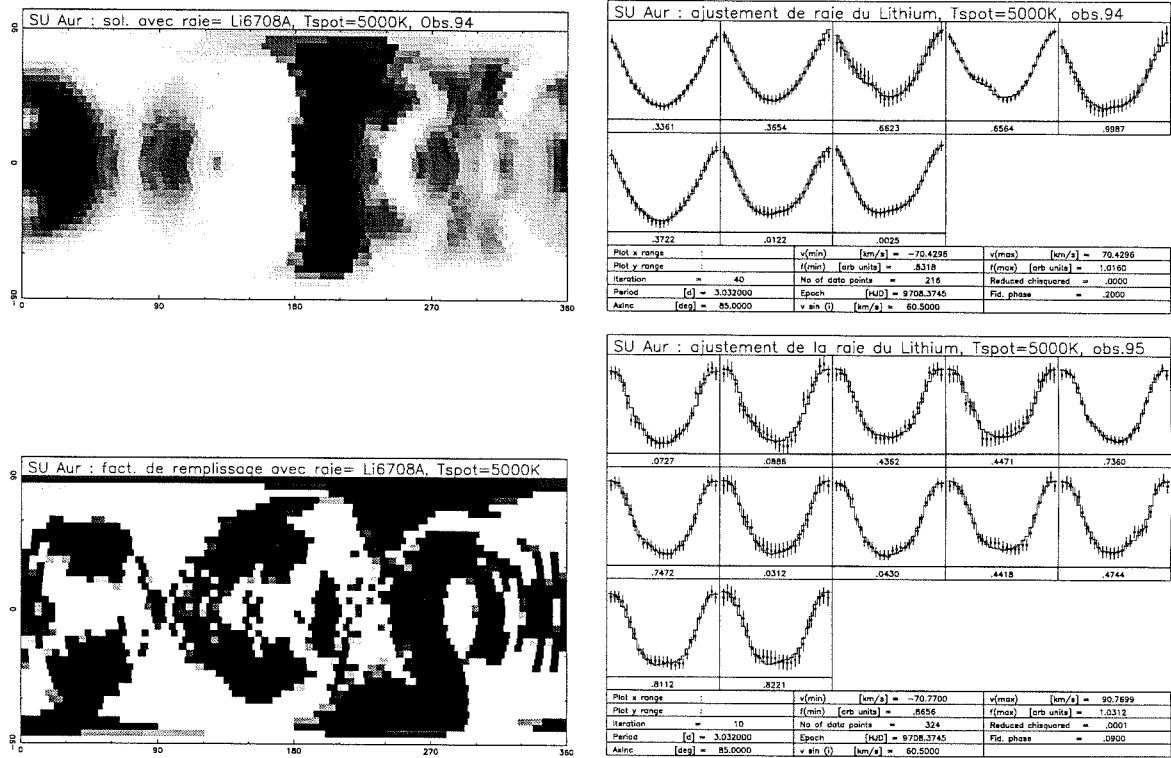


FIG. 2.6 – La carte Doppler du haut est issue des observations de l'hiver 1994 tandis que celle du bas est issue des observations de 1995. Les deux cartes sont obtenues à partir de la raie du lithium. L'ajustement est montré sur la colonne de droite. Les régions froides semblent grossièrement inchangées.

elle s'expliquer par une valeur du champ magnétique beaucoup plus intense qui stabiliserait la polarisation des taches?

Si les cartes reconstruites selon l'hypothèse de régions froides présentent une certaine cohérence notamment avec la faible amplitude de la courbe de lumière lorsqu'on restreint les mesures, elles ne permettent pas d'expliquer le léger veiling de certaines raies telles les raies du Ca II et de l'He I. Par ailleurs, la variation de l'intensité et de la vitesse radiale des composante en absorption dans les ailes rouges des raies de Balmer se comprennent bien par des modèles d'accrétion suivant les lignes de champ. Aussi cherchons nous maintenant si les mesures que nous avons permettraient de valider une telle hypothèse.

Reconstruction de régions chaudes

Il n'existe pratiquement pas de cartes d'imagerie Doppler présentant des taches chaudes. Ceci découle entre autre du fait que peu de CTTS ont à ce jour été observées en vue d'obtenir une carte Doppler. Remarquant que les mesures de DF Tau laissaient supposer des

chocs de matière sur la surface, du fait d'un veiling très important, Unruh [136] a dressé la première carte Doppler montrant des régions plus chaudes que la photosphère. Ces régions sont polaires et peuvent ainsi être expliquées par le modèle d'accrétion contrôlée par la magnétosphère.

Aussi dans un premier temps nous avons calculé la variation de la largeur équivalente de différentes raies, Fig. 2.7. En effet, la variation de la largeur équivalente des raies photosphériques est un des indices justifiant l'hypothèse de taches chaudes.

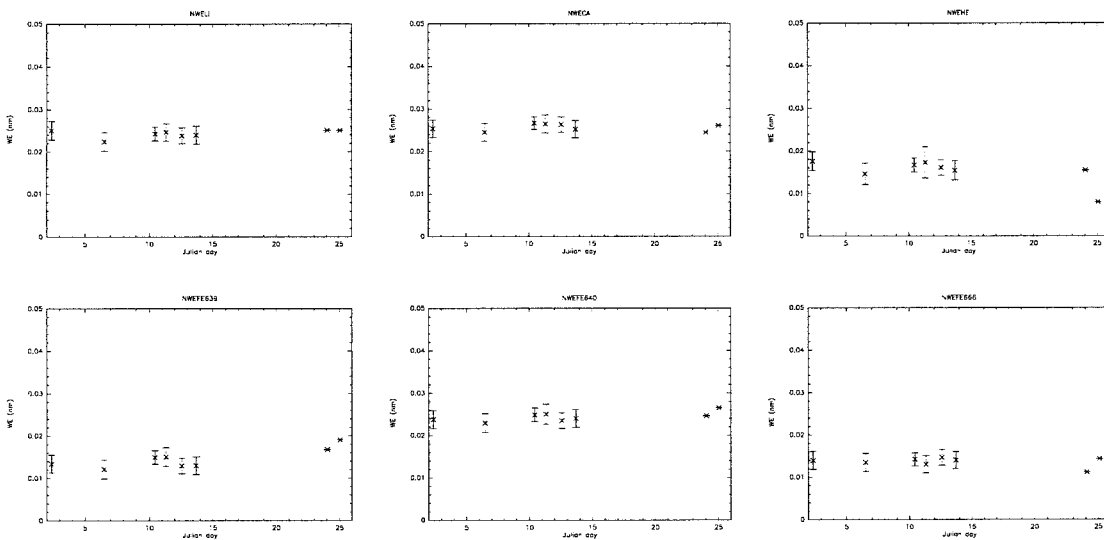


FIG. 2.7 – La variation des largeurs équivalentes des raies photosphériques et de la raie He I est négligeable.

Elle reste, pour toutes les raies, d'un ordre de grandeur inférieur à celui obtenu sur d'autres CTTS telle, par exemple, DF Tau. Sur celle-ci, Unruh [136] obtient une variation de la largeur équivalente des raies pouvant aller jusqu'à 1 \AA pour les raies photosphériques, et 1.4 \AA pour la raie He I à 7065 \AA . À l'aide de la méthode du périodogramme, développée par Scargle [122], nous avons cherché si la variation de la largeur équivalente mettait en évidence une variation périodique de la courbe de lumière. Le nombre de points de mesures est tout à fait insuffisant et le degré de confiance des valeurs trouvées des périodes non concluant (de l'ordre de quelques pour-cents). Cependant, il faut remarquer que la période trouvée n'est pas très différente de 3 jours. Ceci signifie que la très légère variation de la largeur équivalente est peut-être corrélée avec la rotation de l'étoile. C'est pourquoi, en rappelant de plus que l'évolution temporelle des spectres (voir section 2.1) était assez bien expliquée par le modèle d'accrétion, la recherche de régions chaudes se justifie pleinement, Fig. 2.8.

Les taches se retrouvent localisées pareillement mais elles se distinguent moins claire-

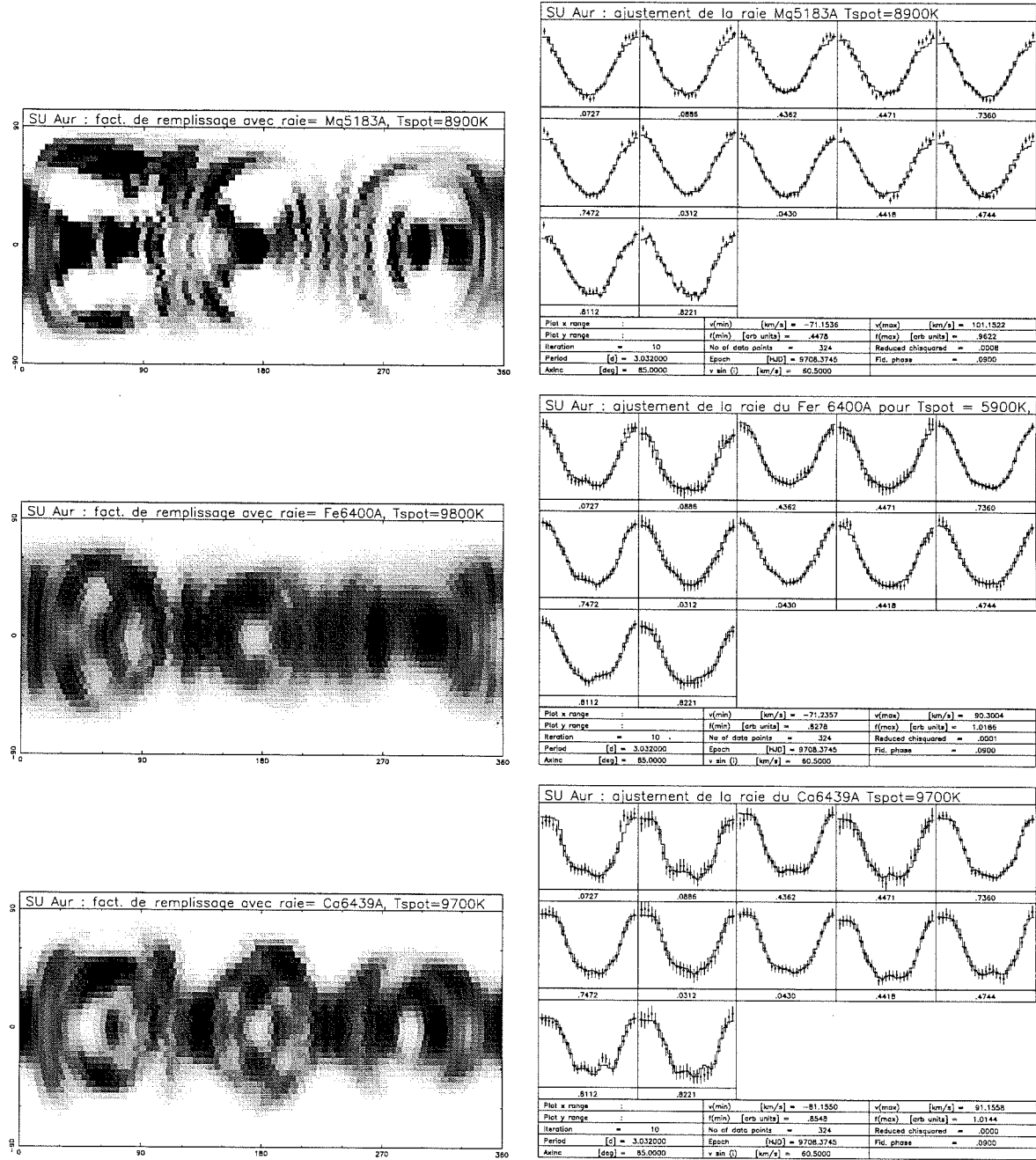


FIG. 2.8 – Reconstruction de régions chaudes sur SU Aurigae avec les raies du Mg, Fe et Ca. Les températures, T_{spot} sont respectivement de 8900K, 5900K et 9700K. La localisation des taches est à peu près inchangée par rapport aux cartes précédentes mais le contraste avec la photosphère est moins marqué.

ment de la photosphère. Ceci peut être une conséquence d'une surévaluation de la différence entre la température de la tache et de la photosphère (voir le paragraphe intitulé "sensibilité de la reconstruction aux erreurs d'estimation des températures" section 3.3.2). Par ailleurs l'algorithme ne converge pas pour les mêmes valeurs de T_{spot} suivant la raie. Il n'est ainsi pas possible d'obtenir une solution unique et acceptable pour l'ensemble des raies. Aussi, nous accordons un niveau de confiance limité à ces dernières reconstructions. Il est particulièrement étonnant que pour des températures si élevées, la largeur équivalente des profils, qui varie d'autant plus que la température est haute (la fonction de Planck est une fonction de T^4), autorise un si bon ajustement des profils alors qu'une valeur quasiment nulle du veiling a été mesurée. Un élément d'explication serait que les profils intrinsèques ont été mal modélisés pour cette gamme de températures.

Par ailleurs il est attendu des taches chaudes qu'elles soient relativement petites et très localisées ce qui n'est pas le cas ici où elles semblent très étendues, comme le montre la reconstruction. Notons toutes fois qu'une tache qui couvrirait 30% de la surface de l'étoile a été estimée sur RW Aur [75] pour expliquer la variabilité de sa courbe de lumière.

Enfin, rappelons que Petrov *et al.* [109] évoquaient la présence d'une tache de température de l'ordre de 10 000 K qui couvrirait seulement 1% de la surface de l'étoile contre $\sim 40\%$ ici trouvé. La résolution de nos cartes ne permettrait de toutes façon pas de reconstruire de telles petites structures.

En conclusion, il est raisonnable d'énoncer que les mesures dont nous disposons ne mettent pas en évidence des régions chaudes, mais suggèrent plutôt la présence de régions froides vers l'équateur et en des latitudes voisines de 45° . La topologie des taches semble stable sur l'année. Ces régions peuvent être interprétées comme des traceurs du champ magnétique qui, comme dans le cas du soleil, naîtrait à l'équateur. Ceci n'exclut pas la possibilité de coexistence de régions chaudes qui ne seraient pas perceptibles ici compte tenu de la résolution.

Conclusion

Dans le premier chapitre, nous avons montré le rôle essentiel que joue le champ magnétique dans l'évolution interne d'une étoile, en particulier d'une T Tauri, mais aussi dans l'interaction de celle-ci avec le milieu qui l'entoure. Les mesures qui manifestent l'activité magnétique ont été mises en évidence. Parmi elles, l'imagerie Doppler apporte quelques arguments en faveur de certains modèles suivant leurs prédictions, en particulier en ce qui concerne la localisation des taches.

Des observations menées sur SU Aurigae ont permis de reconstruire sa carte Doppler selon deux hypothèses : celle de régions de températures plus basses que la photosphère et celle de régions plus chaudes. Les cartes obtenues, de même que des arguments basés sur d'autres mesures, semblent confirmer l'existence de régions froides au niveau de l'équateur et en des latitudes voisines de 45° . Elles pourraient s'interpréter dans un contexte semblable à l'activité magnétique solaire. Cependant, quelques indices parmi lesquels, la fraction de surface importante occupée par les taches et la valeur négligeable de rotation différentielle, laissent entendre que les phénomènes mis en jeu sont sans doute autres. De plus certains indices observationnels plaident en faveur d'un modèle d'accrétion. L'hypothèse de taches chaudes ne peut donc être réfutée.

Un travail reste à faire pour tirer pleinement parti des observations que nous avons menées :

- des observations AAT (Anglo Australian Telescope) effectuées par Donati pendant la même période que les observations de l'hiver 1995 permettraient de combler un trou en phase important dans nos données. En effet, les mesures provenant d'Australie, ces observations sont complémentaires des nôtres (fuseau horaire décalé de pratiquement 12 heures).
- dans la mesure où la même signature sur toutes les raies photosphériques est attendue, il est judicieux de les corrélérer de manière à obtenir un profil de très bon rapport signal sur bruit. Nous disposons déjà de ces profils tant pour les observations menées sur ELODIE que pour les observations AAT. La reconstruction à partir de ces profils devrait avoir une résolution bien supérieure.

- si l'hypothèse avancée par Petrov *et al.* d'une tache chaude de température de l'ordre de 10 000 K et couvrant 1% de la surface s'avère bonne, il faut montrer qu'elles en seraient les conséquences tant sur la courbe de lumière que sur les mesures Doppler. Sans doute une telle structure serait d'une part trop petite pour être reconstruite à partir d'une douzaine de spectres et de plus incompatible avec la photométrie qui a été obtenue, même si celle-ci est affectée par le milieu circumstellaire.
- des observations obtenues sur SU Aurigae un an après les observations sur ELODIE sont actuellement en cours de traitement par Y Unruh. Nous avons entrepris une collaboration qui débute à la mi-septembre.

Troisième partie

Annexes

*Rêvons c'est l'heure...
Un vaste et tendre
Apaisement
Semble descendre
Du firmament
Que l'astre irise...*

La bonne chanson, Paul Verlaine.

Chapitre 1

Mesures des transformées de Radon généralisées

Sommaire

1.1	Opérateur G^\pm	173
1.2	Opérateur $G^{p/i}$	176

Les expressions des fonctions poids associées aux transformées de Radon généralisées sont données. L'opérateur G^\pm découle d'une première transformation unitaire visant à regrouper des observations déphasées d'une demi période. Dans le cas d'inclinaison nulle de l'étoile par rapport à l'observateur, ces deux jeux de données contiennent exactement la même information. De la décomposition paire-impair est ensuite déduit l'opérateur $G^{p/i}$.

1.1 Opérateur G^\pm

L'expression des fonctions pondérées μ^+ et μ^- sur chacun des hémisphères est déduite des définitions (2.5):

$$\mu^+ (s\omega + t\omega^\perp) = \begin{cases} (1 - \epsilon) (c\sqrt{1 - r^2} + \sqrt{1 - c^2}t) + \\ \epsilon (c^2 (1 - r^2) + 2c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - r^2}t + (1 - c^2) t^2) & \text{si } t \geq -c\sqrt{1 - s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu^- (s\omega + t\omega^\perp) = \begin{cases} (1 - \epsilon) \left(-c\sqrt{1 - r^2} + \sqrt{1 - c^2}t \right) + \\ \epsilon \left(c^2 (1 - r^2) - 2c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - r^2}t + (1 - c^2) t^2 \right) & \text{si } t \geq c\sqrt{1 - s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $r = \sqrt{t^2 + s^2}$. Ces fonctions sont $C^0(D)$ et $C^\infty(D)$ par morceaux. Dans le cas particulier $\epsilon = 1$, la fonction poids, sur l'hémisphère visible, se comporte en $\cos^2 \theta_0$. Ceci assure la continuité, avec la partie non visible, des fonctions μ^+ et μ^- ainsi que celle de leur dérivée première. Les poids sont alors dans l'espace des fonctions $C^1(D)$.

Soit \mathcal{E} l'ellipse de demi grand axe unitaire dans la direction ω et demi petit axe de longueur c . Son complémentaire dans le disque D est noté \mathcal{E}^c , voir fig. 1.1.

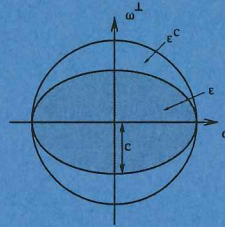


FIG. 1.1 – Paramètres de l'ellipse \mathcal{E}

En sommant et en soustrayant les observations déphasées d'une demi période, la fonction cherchée est mesurée deux fois dans l'ellipse (partie toujours visible) et une fois au dehors de l'ellipse. Alors par définition de $s(\omega, s)$ et $a(\omega, s)$, voir section 2.1.3, il s'en suit:

$$\begin{aligned} a(\omega, s) &= \int_{\substack{x \cdot \omega = \overline{s} \\ x \in \mathcal{E}^c}} f(x) \cdot \mu \left((x \cdot \omega) \omega + |x \cdot \omega^\perp| \omega^\perp \right) dx \\ &+ \int_{\substack{x \cdot \omega = \overline{s} \\ x \in \mathcal{E}}} f(x) \cdot \left(\mu \left((x \cdot \omega) \omega + (x \cdot \omega^\perp) \omega^\perp \right) + \mu \left(- (x \cdot \omega) \omega - (x \cdot \omega^\perp) \omega^\perp \right) \right) dx \\ m(\omega, s) &= \int_{\substack{x \cdot \omega = \overline{s} \\ x \in \mathcal{E}^c}} f(x) \cdot \operatorname{sgn} (x \cdot \omega^\perp) \mu \left((x \cdot \omega) \omega + |x \cdot \omega^\perp| \omega^\perp \right) dx \\ &+ \int_{\substack{x \cdot \omega = \overline{s} \\ x \in \mathcal{E}}} f(x) \cdot \left(\mu \left((x \cdot \omega) \omega + (x \cdot \omega^\perp) \omega^\perp \right) - \mu \left(- (x \cdot \omega) \omega - (x \cdot \omega^\perp) \omega^\perp \right) \right) dx. \end{aligned}$$

Plus précisément, la mesure obtenue en fonction des valeurs prises par $f = (f^+, f^-)^t$ sur

chacun des hémisphères s'écrit :

$$\begin{aligned}
 a(\omega, s) &= \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^+(x) \left((1-\epsilon) \left(c\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) \right. \\
 &\quad + \left. \epsilon \left(c^2 (1-x^2) + 2c\sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| \sqrt{1-x^2} + (1-c^2) (x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\
 &\quad + \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^-(x) \left((1-\epsilon) \left(-c\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) \right. \\
 &\quad + \left. \epsilon \left(c^2 (1-x^2) - 2c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-x^2} |x \cdot \omega^\perp| + (1-c^2) (x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\
 &\quad + 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^+(x) \left((1-\epsilon) c\sqrt{1-x^2} + \epsilon \left(c^2 (1-x^2) + (1-c^2) (x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx, \\
 m(\omega, s) &= \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^+(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1-\epsilon) \left(c\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) \right. \\
 &\quad + \left. \epsilon \left(c^2 (1-x^2) + 2c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-x^2} |x \cdot \omega^\perp| + (1-c^2) (x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\
 &\quad + \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^-(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1-\epsilon) \left(-c\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) \right. \\
 &\quad + \left. \epsilon \left(c^2 (1-x^2) - 2c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-x^2} |x \cdot \omega^\perp| + (1-c^2) (x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\
 &\quad + 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = \bar{\mathcal{E}}^s \\ x \in \bar{\mathcal{E}}^s}} f^+(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| + 2\epsilon c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-x^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) dx
 \end{aligned}$$

D'où l'expression des quatre fonctions poids avec $r = \sqrt{s^2 + t^2}$:

$$\begin{aligned}
 \mu_{A^+}(s, t) &= \begin{cases} (1-\epsilon) \left(c\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-c^2} |t| \right) + \\ \epsilon \left(c^2 (1-r^2) + 2c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-r^2} |t| + (1-c^2) t^2 \right) & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ 2(1-\epsilon) c\sqrt{1-r^2} + 2\epsilon \left(c^2 (1-r^2) + (1-c^2) t^2 \right) & \text{sinon} \end{cases} \\
 \mu_{A^-}(s, t) &= \begin{cases} (1-\epsilon) \left(-c\sqrt{1-r^2} + \sqrt{1-c^2} |t| \right) + \\ \epsilon \left(c^2 (1-r^2) - 2c\sqrt{1-c^2} \sqrt{1-r^2} |t| + (1-c^2) t^2 \right) & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\mu_{M+}(s, t) = \operatorname{sgn}(t) \begin{cases} (1 - \epsilon) \left(c\sqrt{1 - r^2} + \sqrt{1 - c^2}|t| \right) + \\ \epsilon \left(c^2(1 - r^2) + 2c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - r^2}|t| + (1 - c^2)t^2 \right) & \text{si } |t| > c\sqrt{1 - s^2} \\ 2(1 - \epsilon)\sqrt{1 - c^2}|t| + 4\epsilon c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - r^2}|t| & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu_{M-}(s, t) = \operatorname{sgn}(t) \begin{cases} (1 - \epsilon) \left(-c\sqrt{1 - r^2} + \sqrt{1 - c^2}|t| \right) + \\ \epsilon \left(c^2(1 - r^2) - 2c(1 - r^2)|t| + (1 - c^2)t^2 \right) & \text{si } |t| > c\sqrt{1 - s^2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2 Opérateur $G^{p/i}$

A partir de l'opérateur G^\pm on obtient, après décomposition de la fonction $f = (f^p, f^i)^t$ en ses composantes paires et impaires, les transformées de Radon vectorielles suivantes :

$$\begin{aligned} a(\omega, s) &= 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^p(x) \left((1 - \epsilon) \sqrt{1 - c^2} |x \cdot \omega^\perp| + \epsilon \left(c^2(1 - x^2) + (1 - c^2)(x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\ &+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^p(x) \left((1 - \epsilon) c\sqrt{1 - x^2} + \epsilon \left(c^2(1 - x^2) + (1 - c^2)(x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\ &+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^i(x) \left((1 - \epsilon) c\sqrt{1 - x^2} + 2\epsilon c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - x^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) dx \\ &+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^i(x) \left((1 - \epsilon) c\sqrt{1 - x^2} + \epsilon \left(c^2(1 - x^2) + (1 - c^2)(x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\ m(\omega, s) &= 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^p(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1 - \epsilon) \sqrt{1 - c^2} |x \cdot \omega^\perp| + \epsilon \left(c^2(1 - x^2) + (1 - c^2)(x \cdot \omega^\perp)^2 \right) \right) dx \\ &+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^p(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1 - \epsilon) \sqrt{1 - c^2} |x \cdot \omega^\perp| + 2\epsilon c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - x^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) dx \\ &+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}^s}} f^i(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1 - \epsilon) c\sqrt{1 - x^2} + 2\epsilon c\sqrt{1 - c^2}\sqrt{1 - x^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) dx \end{aligned}$$

$$+ 2 \int_{\substack{x \cdot \omega = s \\ x \in \mathcal{E}}} f^i(x) \operatorname{sgn}(x \cdot \omega^\perp) \left((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |x \cdot \omega^\perp| + 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-x^2} |x \cdot \omega^\perp| \right) dx$$

D'où les fonctions poids associées aux transformées:

$$\begin{aligned} \mu^{A^p}(s, t) &= 2 \begin{cases} (1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |t| + \epsilon (c^2 (1-t^2-s^2) + (1-c^2) t^2) & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ (1-\epsilon) c\sqrt{1-t^2-s^2} + \epsilon (c^2 (1-t^2-s^2) + (1-c^2) t^2) & \text{sinon} \end{cases} \\ \mu^{A^i}(s, t) &= 2 \begin{cases} (1-\epsilon) c\sqrt{1-t^2-s^2} + 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-t^2-s^2} |t| & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ (1-\epsilon) c\sqrt{1-t^2-s^2} + \epsilon (c^2 (1-t^2-s^2) + (1-c^2) t^2) & \text{sinon} \end{cases} \\ \mu^{M^p}(s, t) &= 2 \operatorname{sgn}(t) \begin{cases} (1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |t| + \epsilon (c^2 (1-t^2-s^2) + (1-c^2) t^2) & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ (1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |t| + 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-t^2-s^2} |t| & \text{sinon} \end{cases} \\ \mu^{M^i}(s, t) &= 2 \operatorname{sgn}(t) \begin{cases} (1-\epsilon) c\sqrt{1-t^2-s^2} + 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-t^2-s^2} |t| & \text{si } |t| > c\sqrt{1-s^2} \\ (1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} |t| + 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{1-t^2-s^2} |t| & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Chapitre 2

Singularités des équations de Volterra

Sommaire

2.1	Singularités, à l'origine et aux racines des polynômes de Tchebitchev, de l'opérateur M^p	179
2.2	Singularité, à l'origine, de l'opérateur A^i	181

Sont ici étudiées les singularités des équations de Volterra associées à chacune des fonctions poids.

2.1 Singularités, à l'origine et aux racines des polynômes de Tchebitchev, de l'opérateur M^p

On s'intéresse à l'équation (2.11) et (2.17) associée à M^p aux voisinages de l'origine et des l racines y_0 de $U_{|l|-1}(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)y}})$ où $U_{|l|}$ est un polynôme de Tchebitchev de seconde espèce. L'approche est suivie dans le cadre du modèle simple où seules les indicatrices sont prises en compte ainsi que dans le cadre des approximations permettant de se ramener à un système triangulaire par blocs.

$$\frac{d}{dy} g_l^{Mp}(y) = f_l^p(\sqrt{1-(1-c^2)y}) K_l^{Mp}(y, y) + \int_0^y f_l^p(\sqrt{1-(1-c^2)x}) \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(x, y) dx \quad (2.1)$$

avec, dans le cas des fonctions poids réduites aux indicatrices d'ellipses:

$$K_l^{Mp}(x, y) = 2i(1-c^2) \operatorname{sgn}(l) \frac{U_{|l|-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}}\right)}{\sqrt{1-(1-c^2)x}} \quad (2.2)$$

et dans le cas des approximations permettant de trouver un système triangulaire :

$$K_l^{Mp}(x, y) = 2 \operatorname{isgn}(l) ((1-\epsilon) \sqrt{1-c^2} \sqrt{y-x(1-c^2)} + \epsilon(1-c^2)^2 (y-(1-c^2)x) \frac{U_{|l|-1}(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}})}{\sqrt{1-(1-c^2)x}}. \quad (2.3)$$

Il a été montré que, dans les deux cas, le noyau est différentiable. Après un développement limité de K_l^{Mp} et de sa dérivée partielle par rapport à y au voisinage de (y_0, y_0) :

$$\begin{aligned} K_l^{Mp}(y, y) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} K_l^{Mp}(y_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(y_0, y_0) \right) (y - y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)^2 \\ \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(y_0, y_0) + \mathcal{O}(y - y_0) + \mathcal{O}(x - y_0), \end{aligned}$$

l'équation (2.1) sans second membre devient :

$$[(A(y_0) + B(y_0))(y - y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)^2] \tilde{f}_l(y) + \int_{y_0}^y \tilde{f}_l(x) (A(y_0) + \mathcal{O}(x - y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)) dx = 0$$

où

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{\partial}{\partial y} K_l^{Mp}(x = y, y), \\ B(y) &= \frac{\partial}{\partial x} K_l^{Mp}(x = y, y) \text{ et} \\ \tilde{f}_l(x) &= \frac{f_l^p(\sqrt{1 - (1 - c^2)x})}{\sqrt{1 - (1 - c^2)x}}. \end{aligned}$$

En supposant que \tilde{f}_l est suffisamment différentiable et de dérivée première $d\tilde{f}_l(x)$, on obtient après dérivation par rapport à y :

$$(A(y_0) + B(y_0) + \mathcal{O}(y - y_0))(y - y_0) d\tilde{f}_l(y) + (2A(y_0) + B(y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)) \tilde{f}_l(y) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{f}_l(y)}{\tilde{f}_l(y)} &= - \frac{2A(y_0) + B(y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)}{A(y_0) + B(y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)} \frac{1}{y - y_0} \\ &= (\gamma(y_0) + \mathcal{O}(y - y_0)) \frac{1}{y - y_0}, \text{ où} \\ \gamma(y) &= - \frac{2A(y) + B(y)}{A(y) + B(y)} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation linéaire est la droite vectorielle:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_l(y) &= k(y - y_0)^{\gamma(y_0)} \exp \mathcal{O}(y - y_0), \quad k \in \mathbb{R} \\ \tilde{f}_l(y) &= k(y - y_0)^{\gamma(y_0)} (1 + \mathcal{O}(y - y_0)). \end{aligned}$$

Calculons $\gamma(y_0)$. D'après (2.2) et (2.3) $K_L^{Mp}(x, y)$ s'écrit comme le produit d'une fonction $H_l^{Mp}(x, y)$ par $U_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}}\right)$. Comme y_0 est une racine du polynôme de Tchebitchev,

$$\frac{\partial}{\partial y} H_l^{Mp}(x = y_0, y = y_0) U_{l-1}\left(\sqrt{\frac{1-y}{1-(1-c^2)x}}\right) = 0.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} A(y_0) &= -\xi(y_0), \\ B(y_0) &= \xi(y_0) \frac{(1-c^2)(1-y_0)}{1-y_0(1-c^2)}, \end{aligned}$$

avec :

$$\xi(y_0) = \frac{1}{2} H_l^{Mp}(y_0, y_0) \sqrt{\frac{1-(1-c^2)y_0}{1-y_0}} dU_{l-1} \left(\sqrt{\frac{1-y_0}{1-1(1-c^2)y_0}} \right) \frac{1}{1-1(1-c^2)y_0},$$

d'où est déduit :

$$\gamma(y_0) = -\frac{(1+c^2)-y_0(1-c^2)}{c^2}.$$

Ainsi $\forall c \in]0, 1]$ et $y_0 \in [0, 1]$, $\gamma(y_0) < 0$. Par ailleurs, $\gamma(y_0)$ est une fonction croissante de y_0 et ainsi, $\forall y_0$, elle vérifie $\gamma(y_0) \leq \gamma(1) (= -2)$.

Il n'existe donc pas de fonction de carré sommable satisfaisant l'équation.

2.2 Singularité, à l'origine, de l'opérateur A^i

L'opérateur A^i est étudié au voisinage de $y \sim 0$.

Rappelons l'équation (2.15) :

$$\frac{d}{dz} \tilde{g}_l^{A^i}(\sqrt{1-z}) = \int_0^z f_l^i(\sqrt{1-x}) \frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) dx$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) = \int_0^1 \frac{\frac{\partial}{\partial y} K_l^{A^i}(x, x+(z-x)u)\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}} du.$$

Au voisinage de $(x, y) \sim (0, 0)$, la dérivée partielle de $K_l^{A^i}(x, y)$, qui est une fonction continue, vaut :

$$\frac{\partial}{\partial y} K_l^{A^i}(x, y) = \begin{cases} 2\epsilon c \sqrt{1-c^2} \sqrt{\frac{x}{y-x}} & \text{si } x < (1-c^2)y \\ 2\epsilon(1-c^2) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le noyau $\frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z)$ peut alors être calculé :

$$\frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) = \begin{cases} \int_0^{\frac{c^2}{1-c^2} \frac{x}{z-x}} 2\epsilon((1-c^2)\sqrt{\frac{u}{1-u}}) du \\ + \int_{\frac{c^2}{1-c^2} \frac{x}{z-x}}^1 2\epsilon c \sqrt{\frac{1-c^2}{1-u}} \sqrt{\frac{x}{z-x}} du & \text{si } x < (1-c^2)z \\ \int_0^1 2\epsilon(1-c^2) \sqrt{\frac{u}{1-u}} du & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces intégrales sont finies et après calcul l'expression suivante est trouvée :

$$\frac{\partial}{\partial z} H_l^{A^i}(x, z) = \epsilon \begin{cases} \frac{(1-c^2)\pi}{2} + 2c \frac{\sqrt{x(z(1-c^2)-x)}}{z-x} + \arcsin \frac{(1+c^2)x-(1-c^2)z}{(1-c^2)(z-x)} & \text{si } x < (1-c^2)z \\ (1-c^2)\pi & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette fonction est bien continue et dérivable. Sa dérivée partielle par rapport à z est :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_l^{A^i}(x, z) = \epsilon \begin{cases} \frac{2c^2 x^2 + (1-c^2)^2 z^2 - (1-c^4)zx}{c\sqrt{x(z(1-c^2)-x)(z-x)}} & \text{si } x < (1-c^2)z \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'équation (2.15) est dérivée une nouvelle fois pour obtenir l'opérateur de Volterra de seconde espèce suivante :

$$\frac{d^2}{dz^2} \tilde{g}_l^{A^i}(\sqrt{1-z}) = \epsilon \pi (1-c^2) f(z) + \int_0^{(1-c^2)z} f_l^i(\sqrt{1-x}) \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_l^{A^i}(x, z) dx.$$

Ce noyau est de la forme $\frac{\tilde{H}_l^{A^i}(x, z)}{\sqrt{x(z(1-c^2)-x)}}$, avec $\tilde{H}_l^{A^i}(x, z)$ bornée. Ainsi, par théorème 6, il existe une unique solution continue.

Bibliographie

- [1] Baranne A., Queloz D., Mayor M., et al. Elodie: a spectrograph for accurate radial velocity measurements. *Astronomy and Astrophysics Supplement*, 119:373–390, 1996.
- [2] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover, 1970.
- [3] C.W. Allen. *Astrophysical Quantities*. The Athlone Press, 1976.
- [4] I. Appenzeller and R. Mundt. T tauri stars. *Astronomy and Astrophysics Review*, 1:291–334, 1989.
- [5] S. Audic, T. Guillot, and N. Weiss. *Cours de structure interne.*, chapter Structure des champs magnétiques solaires et stellaires. Observatoire de Paris, Section de Meudon, DASGAL, 1992.
- [6] G. Basri and C. Batalha. Hamilton echelle spectra of young stars. I - Optical veiling. *The Astronomical Journal*, 363:654–669, 1990.
- [7] G. Basri and C. Bertout. Accretion disk around T tauri stars. II. Balmer emission. *The Astronomical Journal*, 341:341–358, 1989.
- [8] G. Basri, G.W. Marcy, and J. A. Valenti. Limits on the magnetic flux of pre-main-sequence stars. *The Astronomical Journal*, 390:622–633, 1992.
- [9] C.C. Batalha et al. The narrow emission lines of T Tauri stars. *The Astrophysical Journal Supplement*, 103:211, 1996.
- [10] R. Bell, K. Eriksson, B. Gustafsson, and A. Nordlund. A grid of model atmospheres for metal-deficient giant stars. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 23:37–95, 1976.
- [11] C. Bertout. T Tauri stars - Wild as dust. *Annual review of astronomy and astrophysics*, 27:351–395, 1989.

-
- [12] C. Bertout, G. Basri, and J. Bouvier. Accretion disks around T Tauri stars. *The Astronomical Journal*, 330:350–373., 1988.
- [13] C. Bertout and J. Bouvier. Accretion disks around T Tauri stars - part four - the disk-star boundary layer. *Astronomy and Astrophysics*, 275:236–238, 1993.
- [14] C. Bertout, S. Harder, F. Malbet, C. Mennessier, and O. Regev. Photometric observations of YY Orionis: New insight into the accretion process. *The Astronomical Journal*, 112:2159–2167, 1997.
- [15] C. Bertout and C. Mennessier. Surface properties of T Tauri stars. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n° 176, Stellar Surface Structure*, pages 329–335. Kluwer Academic, 1996.
- [16] C. Bertout and O. Regev. Cool mass-losing boundary layers of T Tauri accretion disks. *Astronomy and Astrophysics*, 399:163–166, 1992.
- [17] J. Boman. An exemple of non-uniqueness for a generalized Radon transform. 1984.
- [18] J. Boman. Uniqueness theorem for a generalized Radon transform. 1994.
- [19] J.F. Bonnans, J.C. Gilbert, C. Lemaréchal, and C. Sagastizabal. Méthodes numériques d’optimisation, septembre 1995.
- [20] J. Bouvier. *Rotation et activité dans les étoiles T Tauri*. PhD thesis, Université de Paris VII, mars 1987.
- [21] J. Bouvier. Rotation in T Tauri stars. II - Clues for magnetic activity. *The Astrophysical Journal*, 99:946–964, 1990.
- [22] J. Bouvier and C. Bertout. Spots on T Tauri stars. *Astronomy and Astrophysics*, 211:99, 1989.
- [23] J. Bouvier, C. Bertout, W. Benz, and M. Mayor. Rotation in T Tauri stars. I - Observations and immediate analysis. *Astronomy and Astrophysics*, 165:110–119, 1986.
- [24] J. Bouvier, C. Bertout, and P. Bouchet. DN Tauri - A spotted T Tauri star. *Astronomy and Astrophysics*, 158:149–157, 1986.
- [25] J. Bouvier, S. Cabri, et al. Coyotes-I. Multisite UBVRI photometry of 24 pre-main-sequence stars of th Taurus-Aurigae cloud. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 101:485–498, 1993.

-
- [26] J. Bouvier, S. Cabri, et al. Coyotes-I, the photometric variability and rotational evolution of T Tauri stars. *Astronomy and Astrophysics*, 272:176–206, 1993.
- [27] J. Bouvier et al. Coyotes-II, spot properties and the origin of photometric period variations in T Tauri stars. *Astronomy and Astrophysics*, 299:89, 1995.
- [28] R.N. Bracewell. *The Fourier Transform and its Applications*. McGraw-Hill, 1983.
- [29] R.N. Bracewell and A.C. Riddle. Inversion of fan-beam scans in radio astronomy. *The Astrophysical Journal*, 150:427–434, 1967.
- [30] N. Calvet. The chromospheric hypothesis for the T Tauri phenomenon. *The Astrophysical Journal*, 277:725–737, 1984.
- [31] N. Calvet. Properties of the winds of T Tauri stars. In B. Reipurth and C. Bertout, editors, *International Astronomical Union Symposium n182, Herbig-Haro flows and the birth of low mass stars*, pages 417–432. Kluwer, 1997.
- [32] N. Calvet and L. Hartmann. Balmer line profiles for infalling T Tauri envelopes. *The Astrophysical Journal*, 386:239–247, 1992.
- [33] A.C. Cameron. Modelling stellar photospheric spots using spectroscopy. In P.B. Byrne and D.J. Mullan, editors, *Surface Inhomogeneities on Late-Type Stars*, pages 33–44. Springer, 1992.
- [34] A.C. Cameron. Rotational evolution of magnetic T Tauri stars with accretion discs. *Astronomy and Astrophysics*, 274:309, 1993.
- [35] A.C. Cameron. *The Sussex Stellar Surface Imaging. User Guide*, 1993. Release Version 1.0.
- [36] A.C. Cameron. Doppler images of AB Doradus in 1992 January. *Mon. Not. of the Royal Astron. Soc.*, 269:814, 1994.
- [37] M. Cohen and J.H. Bieging. Radio variability and structure of T Tauri stars. *The Astronomical Journal*, 92:1396–1402, 1986.
- [38] A.M. Cormack. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. *J. Appl. Phys.*, 34:2722–2727, 1963.
- [39] A. Decarreau, D. Hilhorst, C. Lemaréchal, and J. Navaza. Dual methods in entropy maximization. Application to some problems in crystallography. *SIAM J. Optimization*, 2:173–197, 1992.

-
- [40] L. Desbat. *Critères de choix des paramètres de régularisation: application à la déconvolution*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, juin 1990.
- [41] L. Desbat. Algebraic reconstructions from efficient sampling in tomography. In *Computerized Tomography*, pages 124–137. VSP, 1995. Novosibirsk 93.
- [42] L. Desbat. Efficient parallel sampling in vector field tomography. *Inverse Problems*, 11:995–1003, 1995.
- [43] L. Desbat. *Échantillonnage efficace en tomographie*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, octobre 1997.
- [44] L. Desbat and D. Girard. The “minimum reconstruction-error” choice of regularization parameters: some more efficient methods and their application to deconvolution problems. *SIAM J. Sci. Comput.*, 16(6):1387–1403, 1995.
- [45] L. Desbat and C. Mennessier. Doppler imaging and tomography (soumis). *Annales de l’IMAG.*, 1997.
- [46] L. Desbat and C. Mennessier. échantillonnage efficace en imagerie Doppler. In *Gretsi Grenoble*, 1997.
- [47] L. Desbat and C. Mennessier. Efficient sampling in Doppler imaging. In *SampTA’97, Aveiro*, pages 16–21, 1997.
- [48] L. Desbat and P. Turlier. Measurement optimization in tomography. In R. Vichnevsky and J.J.H. Miller, editors, *IMACS’91, 13th World Congress on Computation and Applied Mathematics*, volume 3, pages 1523–1534, 1991.
- [49] A.J. Deutsch. International Astronomical Union Symposium n6. In B. Lehenert, editor, *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, page 209. Cambridge University Press, 1958.
- [50] A.J. Deutsch. Harmonic analysis of rigidly rotating Ap stars. *The Astronomical Journal*, 159:985, 1970.
- [51] J.F. Donati. *Contribution à l’étude des structures magnétiques dans les atmosphères stellaires*. PhD thesis, Université de Paris VII, décembre 1990.
- [52] J.F. Donati. Stellar magnetic imaging from spectropolarimetric data. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n176, Stellar Surface Structure*, pages 53–60. Kluwer, 1996.
- [53] J.F. Donati, S.F. Brown, M. Semel, D.E. Rees, et al. Photospheric imaging of the RS CVn system HR 1099. *Astronomy and Astrophysics*, 265:682–700, 1992.

-
- [54] J.F. Donati et al. Detection of a magnetic region on HR 1099. *Astronomy and Astrophysics Letters*, 232:1–4, 1990.
- [55] J.F. Donati et al. The magnetic field of the Ap stars euma. *Astronomy and Astrophysics Letters*, 233:17–20, 1990.
- [56] J.F. Donati, M. Semel, and F. Praderie. Zeeman-Doppler imaging of active stars. II - Numerical simulation and first observational results. *Astronomy and Astrophysics Letters*, 225:467–478, 1989.
- [57] S. Edwards. Magnetospherically mediated accretion in classical T Tauri stars. In B. Reipurth and C. Bertout, editors, *International Astronomical Union Symposium n182, Herbig-Haro flows and the birth of low mass stars*, pages 433–442. Kluwer, 1997.
- [58] A.E. Falk and W.H. Wehlau. Harmonic analysis of the line profiles of an oblique rotator. *The Astronomical Journal*, 192:409, 1974.
- [59] A. Faridani. Results, old and new, in computed tomography. *IMA*, 1995.
- [60] C. Gasquet and P. Witomski. *Analyse de Fourier et applications. Filtrage, calcul numérique et ondelettes*. Masson, 1995.
- [61] M.S. Giampapa, G.S. Basri, C.M. Johns, and C. Imhoff. A synoptic of H-alpha line profile in the T Tauri star SU Aurigae. *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, 89:321–344, 1993.
- [62] R.L. Gilliland and A.K. Dupree. HST imaging of Betelgeuse. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n176, Stellar Surface Structure*, pages 165–172. Kluwer, 1996.
- [63] D.A. Girard. A fast 'Monte-Carlo Cross-Validation' procedure for large least squares problems with noisy data. *Numer. Math.*, 56:1–23, 1989.
- [64] D.A. Girard. Asymptotic optimality of the fast randomized versions of GCV and C_L in ridge regression and regularisation. *Ann. of Stat.*, 19(4):1950–1963, 1991.
- [65] G.H. Golub, M. Heath, and G. Wahblä. Generalized Cross-Validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics*, 21:215–224, 1979.
- [66] A.V. Goncharskii, V.V. Stepanov, V.L. Khokhlova, and A.G. Iagola. Reconstruction of local line profiles from those observed in an Ap spectrum. *Soviet Astron. Lett*, 3:147–149, 1977.

- [67] A.V. Goncharskii, V.V. Stepanov, V.L. Khokhlova, and A.G. Iagola. Mapping of chemical elements on the surfaces of Ap stars. I. Solution of the inverse problem of finding local profiles of spectral lines. *Soviet Astronomy*, 26:690–696, 1982.
- [68] D.F. Gray. *The observation and analysis of stellar photospheres*. Wiley and Sons, 1976.
- [69] N. Grevesse and A. Noels. *In Origin and Evolution of the Elements*. Cambridge University Press, 1993.
- [70] G. Gripenberg, S.O. Londen, and O. Staffans. *Volterra Integral and Functional Equations*. Cambridge University Press, 1990.
- [71] C.W. Groetsch. *The theory of Tikhonov regularization for Fredholm equations the first kind*. Pitman Advanced Publishing Program, 1984.
- [72] C.W. Groetsch. *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*. Vieweg, 1993.
- [73] E.W. Guenther. Infrared lines for measuring the magnetic field strength. *Astronomy and Astrophysics*, 309:777–780, 1996.
- [74] E.W. Guenther. Magnetic fields of T Tauri stars. In B. Reipurth and C. Bertout, editors, *International Astronomical Union Symposium n182, Herbig-Haro flows and the birth of low mass satrs*, pages 465–474. Kluwer, 1997.
- [75] S. Harder. Deux études sur les étoiles T Tauri. Master’s thesis, Université Grenoble I-Université Lyon I-E.N.S. Lyon, 1995.
- [76] L. Hartmann et al. Wave-driven winds from cool stars. II - Models for T Tauri stars. *The Astrophysical Journal*, 261:279–292, 1982.
- [77] L. Hartmann, R. Hewett, and N. Calvet. Magnetospheric accretion models for T Tauri stars. I: Balmer line profiles without rotation. *The Astrophysical Journal*, 426:669–687, 1994.
- [78] A.P. Hatzes and S.S. Vogt. Doppler images of the spotted RS CVn star HD 26337. *Monthly Notices Royal Astronomy Transactions*, 258:387, 1992.
- [79] A. Hertle. On the injectivity of the attenuated Radon transform. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92:201–205, 1984.
- [80] J. Heyvaerts. *Cours de structure interne*, chapter Physique du phénomène éruptif. Observatoire de Paris, Section de Meudon, DASGAL, 1992.

-
- [81] J.B. Hiriart-Urruty and C. Lemaréchal. *Convex Analysis and minimization Algorithms*. Springer-Verlag, 1993.
- [82] Hochstadt. *Integral Equations*. Wiley classics library, 1989.
- [83] A.M. Hubert and E. Schatzman, editors. *Cours de structure interne, production et rôle du champ magnétique*. Observatoire de Paris, Section de Meudon, DASGAL, 1992.
- [84] C. Johns and G. Basri. The line profile variability of SU Aurigae. *The Astronomical Journal*, 449:341–364, 1995.
- [85] C.M. Johns-Krull. Limits on the differential rotation of T Tauri stars. *Astronomy and Astrophysics*, 306:803–810, 1996.
- [86] R.M. Johnstone and M.V. Penston. Follow-up Zeeman observations of the T Tauri star RU Lup. *Royal Astronomical Society, Monthly Notices*, 227:797–800, 1987.
- [87] I. Joncour. *Imagerie Doppler des étoiles T Tauri*. PhD thesis, Université de Paris VII, décembre 1994.
- [88] I. Joncour, C. Bertout, and J. Bouvier. Doppler imaging of the T Tauri star HDE 283572. *Astronomy and Astrophysics*, 291:19–22, 1994.
- [89] I. Joncour, C. Bertout, and F. Ménard. Doppler imaging of the T Tauri star V410 tau. *Astronomy and Astrophysics*, 285:25–28, 1994.
- [90] C.R. Kitchin. *Astrophysical Techniques*. Adam Hilger, 1991.
- [91] A. Königl. Disk accretion onto magnetic T Tauri stars. *The Astrophysical Journal*, 370:39–43, 1991.
- [92] M. Kürster. Doppler imaging with a clean-like approach. *Astronomy and Astrophysics*, 274:851–869, 1993.
- [93] A. Lannes, E. Anterrieu, and K. Bouyoucef. Fourier interpolation and reconstruction via Shannon-type techniques; part I: Regularization principle. *Journal of Modern Optics*, 41:1537–1574, 1994.
- [94] A. Lannes, E. Anterrieu, and K. Bouyoucef. Fourier interpolation and reconstruction via Shannon-type techniques; part II: Technical developments and applications. *Journal of Modern Optics*, 43:105–138, 1996.
- [95] C. Lemaréchal. Duality without tears. In A. Mohammad-Djafari and G. Demoments, editors, *Maximum Entropy and Bayesian Methods*, pages 127–132. Kluwer, 1993.

-
- [96] P. Léna. *Méthodes physiques de l'observation*. InterEditions/Editions du CNRS, 1986.
- [97] P. Linz. *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*. SIAM Stud. Appl. Math., 1985.
- [98] F. Malbet, F. Rigaud, C. Bertout, and P. Léna. Detection of a 400 AU disk-like structure surrounding the young stellar object of Z CMa. *The Astronomical Journal*, 271:9–12, 1993.
- [99] P. Maréchal and A. Lannes. Unification of some deterministic and probabilistic methods for the solution of linear inverse problems via the principle of maximum entropy on the mean. *Inverse Problems*, 13:135–151, 1997.
- [100] C. Mennessier. Doppler imaging of SU Aurigae. In F. Malbet and A. Castet, editors, *Low mass star formation from infall to outflow*, pages 300–302. Bastianelli-Guirimand, 1997.
- [101] D. Mihalas. *Stellar Atmospheres*. W.H. Freeman, 1978.
- [102] T. Montmerle et al. Einstein observations of the Rho Ophiuchi dark cloud - an X-ray christmas tree. *The Astrophysical Journal*, 269:182–201, 1983.
- [103] T. Montmerle et al. Magnetic fields, activity and circumstellar material around young stellar objects. *Protostars and planets III*, 3:689–717, 1993.
- [104] F. Natterer. Efficient implementation of 'optimal' algorithms in computerized tomography. *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 2:545–555, 1980.
- [105] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Wiley, 1986.
- [106] E. Novotny. *Introduction to atmospheres and interiors*. Oxford University Press, 1973.
- [107] R.M. Perry. On reconstructing a function on the exterior of a disk from its Radon transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 59:324–341, 1977.
- [108] P.P Petrov. Wind, accretion and spots of the T Tau star su aurigae. In K.G. Strassmeier, editor, *International Astronomical Union Symposium n176, Stellar Surface Structure, Poster Proceedings*, pages 217–219, 1995.
- [109] P.P Petrov, E. Gullbring, et al. The gas flows of SU Aurigae. *Astronomy and Astrophysics*, 314:821–834, 1996.

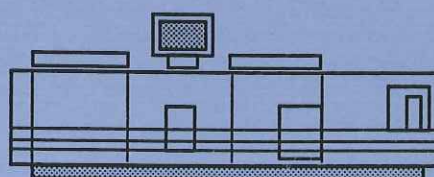
-
- [110] N.E. Piskunov, I. Tuominen, and O. Vilhu. Doppler images of rotating stars using maximum entropy image reconstruction. *The Astrophysical Journal*, 321:496–515, 1987.
- [111] M.D. Pyper. Alf2 CVn and the oblique rotator theory. *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, 18:347, 1969.
- [112] E.T. Quinto. The invertibility of rotation invariant Radon transforms. *J. Math. Anal. Appl.*, 91:510–522, 1983.
- [113] E.T. Quinto. The invertibility of rotation invariant Radon transforms (erratum). *J. Math. Anal. Appl.*, 94:602–603, 1983.
- [114] Neuhaeuser R. et al. ROSAT survey observation of T Tauri stars in Taurus. *Astronomy and Astrophysics*, 297:391–417, 1995.
- [115] C.R. Rao and N.K. Bose. *Handbook of Statistics, Signal Processing and its Applications*, volume 10. 1993.
- [116] O. Regev and C. Bertout. Asymptotic models of accretion disc boundary layers. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 272:71–79, 1995.
- [117] B. Reipurth and C. Bertout, editors. *Herbig-Haro flows and the birth of low mass stars*. Kluwer, 1997.
- [118] J.B. Rice. An oblique rotator model for the magnetic and spectral variable HD 173650. *Astronomy and Astrophysics*, 9:189, 1970.
- [119] J.B. Rice. Doppler imaging of stellar surfaces. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n176, Stellar Surface Structure*, pages 19–33. Kluwer Academic, 1996.
- [120] J.B. Rice and K.G. Strassmeier. Doppler imaging of stellar surface structure. II. the weak-lined T Tauri star V410 Tauri. *Astronomy and Astrophysics*, 316:164–172, 1996.
- [121] S. Roques. *Problèmes Inverses en traitement d'image. Régularisation et résolution en imagerie bidimensionnelle*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, Avril 1987.
- [122] J.D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis. II - Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astronomical Journal*, 263:835–853, 1982.

-
- [123] B.E. Schaefer. A large-amplitude photometric periodicity on a T Tauri star. *The Astrophysical Journal*, 266:45–49, 1983.
- [124] E. Schatzman and F. Praderie. *Astrophysique, Les étoiles*. InterEditions, Editions du CNRS, 1990.
- [125] C.J. Schrijver. The magnetic field of the nearest cool star. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n° 176, Stellar Surface Structure*, pages 1–15. Kluwer, 1996.
- [126] C.J. Schrijver, J. Côté, C. Zwaan, and S.H. Saar. Relations between the photospheric magnetic field and the emission from the outer atmospheres of cool stars. I - The solar Ca II K line core emission. *The Astrophysical Journal*, 337:964–976, 1989.
- [127] M. Semel. Zeeman-Doppler imaging of active stars. I - Basic principles. *Astronomy and Astrophysics*, 225:456–466, 1989.
- [128] E.P. Smith and K.C. Jacobs. *Introductory astronomy and astrophysics*. W.B. Saunders company, 1973.
- [129] M. Smith. T Tauri stars as differential rotators. *Astronomy and Astrophysics*, 287:523–534, 1994.
- [130] K. Stapelfeldt et al. Hubble space telescope imaging of the disks and jets of Taurus young stellar objects. In B. Reipurth and C. Bertout, editors, *International Astronomical Union Symposium n182, Herbig-Haro flows and the birth of low mass stars*, pages 355–364. Kluwer, 1997.
- [131] K.G. Strassmeier. Photometric and spectroscopic modeling of starspots on the RS Canum Venaticorum binary HD 26337. *The Astrophysical Journal*, 348:682–699, 1990.
- [132] K.G. Strassmeier et al. Doppler imaging of high-latitude spot activity on HD 26337. *Astronomy and Astrophysics*, 247:130–147, 1991.
- [133] K.G. Strassmeier et al. A Doppler image of the weak T Tauri star V410 Tau. *The Astrophysical Journal*, 285:17–20, 1994.
- [134] O. Tretiak and C. Metz. The exponential Radon transform. *SIAM J. Appl. Math.*, 39:341–354, 1980.
- [135] Y.C. Unruh. *Doppler imaging of late-type stars*. PhD thesis, University of Sussex, December 1994.

-
- [136] Y.C. Unruh. Surface structure on DF Tau. In K.G. Strassmeier, editor, *International Astronomical Union Symposium n176, Stellar Surface Structure, Poster Proceedings*, pages 93–95, 1995.
- [137] L. Vertgeim. Examples of nonuniqueness in problems related to generalized Radon transform and emission tomography with absorption. *Amer. Math. Soc. Trans.*, 162:257–261, 1994.
- [138] S.S. Vogt. Doppler images of rotating stars using maximum entropy image reconstruction. *The Astrophysical Journal*, 321:496–515, 1987.
- [139] S.S. Vogt and G.D. Penrod. Doppler imaging of spotted stars - Application to the RS Canum Venaticorum star HR 1099. *Astronomical Society of the Pacific*, 95:565–576, 1983.
- [140] F.J. Vrba. Spot evolution on the T Tauri star v 410 tau. *The Astrophysical Journal*, 96:1032–1039, 1988.
- [141] F.M. Walter. Stellar plages. In K.G. Strassmeier and J.L. Linsky, editors, *International Astronomical Union Symposium n° 176, Stellar Surface Structure*, pages 355–369. Kluwer, 1996.
- [142] W. Wehlau. *The Magnetic and related stars*. Mono Book Corp., 1967.



Grenoble, décembre 1997



*Imprimé sur "Xerox 5090",
au Service Reprographie du CNRS de Grenoble.*